Geneza pomysłu Sheffera
dotyczącego redukcji pięciu stałych logicznych do pewnej stałej różnej od nich

W symbolice logicznej Peano-Russella obok licznych symbolów logicznych występują także i symbole logiczne podstawowe, tzw. stałe logiczne—funktory. Sprowadzają się one do pięciu następujących:

1) Symbol negacji „ ∼ ”, reprezentujący funktor negacji („*nie*”).

2) Symbol dysjunkcji „⌣”, reprezentujący funktor dysjunkcji („*lub*”).

3) Symbol koniunkcji „⌢” lub „ . ”, reprezentujący funktor koniunkcji („*i*”).

4) Symbol implikacji „) ”, reprezentujący funktor implikacji („*jeśli — to*”) oraz

5) Symbol równoważności „ ≡ ” (jako znak obustronnego stosunku wynikania), reprezentujący funktor równoważności.

Te symbole podstawowe znajdujemy także i u autorów wcześniejszych.

I tak:

Symbol negacji znajdujemy po raz pierwszy u Herigona (P. Herigonus, Cursus mathematicus, I, Parisiis 1644, Prolegomena). Symbol „ ∼ ” reprezentuje tu minus.

Symbol dysjunkcji i symbol koniunkcji występuje już także, i to po raz pierwszy, u L. Richeri'ego (Algebrae philosophicae in usum aitis inveniendi specimen primum Ludovici Richeri—Miscellanea Taurinensia, A Paris 1761, vol. II, pars 3, ss. 46—63). Symbol „⌒" reprezentuje tu klasę pustą, a symbol „⌣" — zaprzeczenie klasy pustej. Kropka jako symbol koniunkcji czyli mnożenia (iloczynu) logicznego występuje po raz pierwszy dopiero u Leibniza (L. Couturat, Opuscules et fragments inédits de Leibniz, Paris 1903, s. 275).

Symbol implikacji występuje po raz pierwszy u J. D. Gergonne'a (Essai de dialectique rationelle par J. D. Gergonne — Annales de mathématiques pures et appliquées, t. 7, 1816—1817, s. 195). Symbol „) " reprezentuje tu inkluzję.

Wreszcie symbol równoważności znajdujemy po raz pierwszy u G. Fregego (Begriffsschrift. von Dr Gottlob Frege, Halle a. S. 1879, s. 15).

Te stałe logiczne czyli funktory próbowano sprowadzić do jednej tylko z tych stałych, lecz próby te nie doprowadziły w rezultacie do celu.

Pokazało się jednak, i pierwszy dostrzegł to logik amerykański Henry Maurice Sheffer (A set of five independent postulates for Boolean Algebras, with application to logical constants by Henry Maurice Sheffer—Transactions to the American Mathematical Society, vol. 14, 1913, ss. 481—488), że można znaleźć pewną różną od tych pięciu stałych, do której dadzą się one sprowadzić.

Nie wiadomo, jaką drogą doszedł Sheffer do tego ciekawego pomysłu, ale skoro ten pomysł już znamy, można próbować wskazać drogę naturalną, która do niego prowadzi. (W związku z pomysłem Sheffera por. także E. Żyliński, Some remarks concerning the theory of deduction—Fundamenta mathematicae, t. VII, ss. 201—209).

Chodzi tu mianowicie o taką stałą logiczną (oznaczymy ją za Shefferem przez symbol „/", który reprezentuje funkcję wyłączania się), aby do *p/q* (gdzie litery *p*, *q* oznaczają jakiekolwiek zdania logiczne) dały się sprowadzić następujące funkcje logiczne: funkcja negacji $(\sim p)$, funkcja dysjunkcji $(p \smile q)$, funkcja koniunkcji $(p \,.\, q)$, funkcja implikacji $(p \supset q)$ i funkcja równoważności $(p \equiv q)$.

Ze względów technicznych zamiast symbolu „$\sim$" będziemy się odtąd posługiwali symbolem „—".

W tym celu weźmy pod uwagę funkcję o 2-ch zmiennych logicznych sprowadzone do najprostszej postaci.

Są to funkcje sprowadzone do następujących 16-tu funkcyj:

$$p,\quad q,\quad p\,.\,q,\quad p \smile q,\quad 0,\quad p.-q,\quad -p\,.\,q,\quad p.-q. \smile .-p.q$$

$$-p,\quad -q,\quad -p \smile -q,\quad -p.-q,\quad 1,\quad -p \smile q,\quad p \smile -q,\quad p.q. \smile .-p.-q$$

(W związku z tymi 16-ma funkcjami por. P. Poretsky, Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques, Kasan 1899 — Bulletin de la Société physico — mathématique de Kasan, t. VIII, 1898, s. 6, oraz tegoż autora: Exposé élémentaire de la théorie des égalités logiques a deux termes a et b — Extrait de la Revue de Métaphysique et de Morale, mars 1900, s. 5—6).

Wobec tego, że już od dawna nie udawało się przeczenia sprowadzić do innych stałych logicznych, przeto uwzględnimy nasamprzód przeczenie. Postawmy więc sobie pytanie, którą z tych 16-tu funkcyj należy przyjąć za p/q, żeby można było przez nią w sposób najprostszy definiować przeczenie, mianowicie tak, aby p/p oznaczało to samo co $-p$. Pytanie to sprowadza się w rezultacie do tego, jaka z 16-tu wymienionych funkcyj dla $q = p$ staje się $-p$. Otóż dla $q = p$ funkcje te stają się odpowiednio:

$$p,\quad p,\quad p,\quad p,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0$$

$$-p,\quad -p,\quad -p,\quad -p,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1$$

Mamy tu do wyboru cztery pierwsze funkcje dolnego rzędu, tj. $-p$, $-q$, $-p \smile -q$, $-p.-q$.

Ponieważ chodzi tu o taką funkcję, która dawałaby także sumę, iloczyn, implikację i równoważność, przeto dwie pierwsze funkcje muszą być odrzucone. Pozostają więc tylko dwie następujące:

1) $-p \smile -q$, czyli: $p) -q$

2) $-p. -q$, czyli: $-(-p) q)$

Z tych dwóch funkcyj Sheffer wybiera pierwszą. Wyraża ona stosunek wzajemnego wyłączania się.

Wiadomo, że znakiem dysjunkcji jest wyraz „*lub*" oznaczony symbolem „$\smile$". Wyraz „*lub*" posiada trzy różne znaczenia:

1) $p \smile q$, — gdy nie jest wykluczona (wyłączona) prawdziwość obu zdań (członów).

2) $p \smile q$, — gdy jest wykluczona (wyłączona) prawdziwość obu zdań (członów).

3) $p \smile q$, — gdy nie jest wykluczona (wyłączona) fałszywość obu zdań (członów).

Sheffer posługuje się wyrazem „*lub*" w znaczeniu trzecim. Przeto funkcja p/q oznacza u niego, że p i q wzajemnie się wyłączają, a więc jeśli p, to nie q, czyli nie jest prawdą, że zarazem p i q są prawdziwe; a jeśli nie są zarazem prawdziwe, to bądź nie jest prawdą, że p, bądź nie jest prawdą, że q. Symbolicznie tak to można wyrazić:

$$p/q. = . p) -q = -(p.q) = -p \smile -q.$$

Podobnie funkcja p/p oznacza, że p i p wzajemnie się wyłączają, a więc jeśli p, to nie p, czyli nie jest prawdą, że zarazem p i p są prawdziwe; a jeśli nie są zarazem prawdziwe, to bądź nie jest prawdą, że p, bądź nie jest prawdą, że p; a zatem nie p. Symbolicznie tak to można analogicznie wyrazić:

$$p/p. = . p) -p = -(p.p) = -p \smile -p = -p$$

Teraz możemy definiować te stałe logiczne przy pomocy nowej stałej, mianowicie tak:

1) $-p = p/p$

2) $p \smile q = p/p . / . q/q$

3) $p . q = p/q . / . p/q$

4) $p \supset q = p . / . q/q$

5) $p \equiv q = p./.q/q:/:q./.p/p:./.:p./.q/q:/:q./.p/p$

Tę definicję Leśniewski tak skraca:

5) $p \equiv q = p/q./:p/p./.q/q$ (S. Leśniewski, Einleitende Bemerkungen zur Fortsetzung meiner Mitteilung u. d. T. „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik" — Collectanea logica, I, Warszawa 1938, s. 17).

Jeśli użyjemy w tych definicjach znaku negacji, to możemy te definicje znacznie uprościć.

I tak:

1) $-p = p/p$, tj. nie p znaczy tyle co: p wyłącza samo siebie.

2) $p \smile q = -p/-q$, tj. p lub q znaczy tyle co: nie p wyłą-łącza nie q.

3) $p . q = -(p/q)$, tj. p i q znaczy tyle co: nie jest prawdą, że p wyłącza q.

4) $p \supset q = p/-q$, tj. jeśli p to q znaczy tyle co: p wyłącza nie q, czyli: nie jest prawdą, że zarazem p i nie q.

5) $p \equiv q = p/q./. -p/-q$, tj. p jest równoważne q znaczy tyle co: nie jest prawdą, że zarazem: nie zarazem p i q i nie zarazem $-p$ i $-q$.

Definicję równoważności możemy także otrzymać i na podstawie definicji iloczynu i implikacji. Definicję równoważności otrzymujemy więc przy pomocy iloczynu implikacji tak:

5) $p \equiv q = p / - q . q / - p$, tj. p jest równoważne q znaczy tyle co: p wyłącza nie q i q wyłącza nie p.

W ten sposób można wykazać, że przy pomocy funkcji wyłączania się dadzą się zdefiniować funkcje negacji, dysjunkcji, koniunkcji, implikacji i równoważności.

Ks. A. Korcik