ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XIV, zeszyt 3 — 1966

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

UWAGI
O ARYSTOTELESOWSKIM PODZIALE KATEGORII ILOŚCI

1. Arystotelesowski podział kategorii ilości. W ujęciu Arystotelesa ilość (quantitas) należy do kategorii przypadłości. Stanowi jedną z dziewięciu przypadłości. Kategoria ilości nie może być, ściśle biorąc, definiowana. Arystoteles wyróżnia natomiast trzy rodzaje ilości, mianowicie: continuum, contiguum oraz consequenter se habens.

Wspomniane ujęcie Arystotelesa utrzymało się w filozofii scholastycznej do chwili obecnej. P. Hoenen [1] np. tak pisze: „Tria enim genera extensorum ab Aristotele optime distinguuntur: continuum, contiguum et consequenter se habens; [...] quae ita definiuntur: «continua sunt quorum extrema unum, contigua quorum extrema sunt simul, consequenter se habentia inter quae nihil eiusdem generis medium cadit» [...];". I dalej czytamy: „Duplex distinguitur genus continuorum: *Continuum permanens* est sive physicum (corpus naturale) sive mathematicum; hoc potest esse sive corpus (vel solidum) sive superficies sive linea, prout habet sive tres sive duas dimensiones sive unam tantum. *Continuum fluens* (successivum) est sive motus sive tempus. Quanta quae non constituunt unum per se (contigua igitur et distantia) ab Aristotele vocantur *quanta discreta* [...];"[2]. Identyczne stanowisko zajmują także I. Gredt [3], C. Boyer [4], P. Selvaggi [5]

---

[1] P. Hoenen, *Cosmologia*, Romae 1945 [3], s. 7.

[2] Ibid., s. 8, 9.

[3] „Quantitas praedicamentalis dividitur in *continuam* et *discretam* seu numerum (praedicamentalem); continua est, cuius partes inter se continuantur; discreta, cuius partes inter se non continuantur. Numerus dividitur in *binarium, ternarium* etc.; unitas enim addita numeri speciem variat. Quantitas continua dividitur in *lineam* seu quantitatem unius dimensionis, *superficiem* seu duarum dimensionum, *corpus* mathematicum seu trinam dimensionum." (I. Gredt, *Elementa Philosophiae aristotelico-thomisticae,* vol. I, Friburgi Br. 1926 [4], s. 150—151).

[4] „Iam age, extensum est triplicis generis: vel *continuum*, vel *contiguum*, vel *consequenter se habens*. Etenim si habentur duo extensa quae ab invicem distant (cogita lunam et terram), sunt consequenter se habentia, «*inter quae nihil eiusdem generis medium cadit*». Si duo extensa sese tangunt (cogita navim in mari), sunt *contigua*, seu «*quorum extrema sunt simul*». Si denique id quod est extensum est

i inni neoscholastycy. Taki jest stan faktyczny. J. Maritain[6] zwracał wprawdzie uwagę na to, że dane geometrii nieeuklidesowej pociągają za sobą pewne reperkusje tyczące się pojęcia kategorii ilości, jednak uwaga ta nie została wykorzystana. Nie wydaje się to być dziwne, gdyż jeśli na podane wyżej określenia rodzajów ilości oraz na sam podział ilości spojrzymy ze zdroworozsądkowego punktu widzenia, to będziemy całkowicie skłonni uznać i podział i same określenia za bardzo naturalne, właściwe i nie budzące wątpliwości.

P. Hoenen [7], I. Gredt [8], A. G. van Melsen [9] wyraźnie przyjmują, że figury geometryczne mogą być brane jako przykład służący do ilustrowania wspomnianego podziału kategorii ilości. Ten fakt upoważnia do wzięcia pod uwagę bardziej skomplikowanych figur geometrycznych w porównaniu do tych, które znamy z geometrii elementarnej. Powstaje więc pytanie, czy twory geometryczne, znane we współczesnej matematyce, dadzą się sklasyfikować według ujęcia Arystotelesa. W tym celu rozważymy najpierw trzy względnie proste przykłady z topologii teoriomnogościowej.

2. Trzy przykłady. Jako pierwszy przykład weźmiemy zbiór liczb wymiernych domkniętego odcinka (0,1), a więc zbiór wszystkich dodatnich ułamków właściwych z włączeniem zera i jedności. Oznaczmy ten zbiór przez W. Otóż jest rzeczą dobrze znaną [10], że na odcinku (0,1) zbiór W wypełnia tylko przeliczalnie wiele miejsc, tj. zbiór W jest równej mocy (inaczej: równoliczny) ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Natomiast zbiór wszystkich liczb odcinka (0,1) jest mocy kontinuum [11], przeto zbiór W nie wypełnia sobą całego odcinka (0,1). Co więcej, miejsc nie wypełnionych przez W jest nieprzeliczalnie wiele. Zatem zbiór W nie jest ciągły, gdyż jest „poprzedzielany" liczbami niewymiernymi. Lecz zbiór W posiada znaną własność, mianowicie iż między każdymi dwiema liczbami wymiernymi istnieje trzecia pośrednia. Jest więc, jak to się mówi,

---

unum per se (cogita unam plantam) est continuum, seu «*quorum extrema sunt unum*»." (C. B o y e r, *Cursus philosophiae*, vol. I, ed. altera, s. 373).

[5] P. S e l v a g g i, *Cosmologia*, Romae 1959, s. 21—22.

[6] J. M a r i t a i n, *Les degrés du savoir*, Paris 1934 [2], s. 101, 102, 354, 355.

[7] P. H o e n e n, op. cit., s. 8.

[8] „Linea, superficies, corpus mathematicum sunt verae species quantitatis. Nam in unoquoque eorum seorsim sumpto salvatur ratio quantitatis seu ordo partium, ergo quantitates sunt; et unumquoque *specialem* habet ordinem, ergo essentialiter distinguuntur in ipsa ratione quantitatis, seu verae sunt species quantitatis". (I. G r e d t, op. cit., s. 152).

[9] A. G. van M e l s e n, *Filozofia przyrody*, 1963, s. 231—232.

[10] Zob. np. K. K u r a t o w s k i, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962 [2], s. 55.

[11] Ibid., s. 54.

zbiorem gęstym. Nie ma w nim punktów sąsiednich, mimo że nie jest ciągły. Zatrzymajmy w pamięci zauważone powyżej własności zbioru W.

Drugim przykładem niech nam posłuży tzw. zbiór nigdziegęsty Cantora. Geometrycznie możemy określić go następująco. Weźmy odcinek domknięty 01 i podzielmy go na trzy równe części. Usuńmy następnie wnętrze odcinka środkowego. Pozostaną więc dwa odcinki: (0,1/3) oraz (2/3,1). Z każdym z pozostałych odcinków postąpmy jak poprzednio, tzn. podzielmy go na trzy równe części i usuńmy część środkową (dokładniej: wnętrze części środkowej). Tę operację będziemy powtarzać w nieskończoność. Zbiór, który otrzymamy z odcinka 01 usuwając zeń w opisany sposób przeliczalnie wiele odcinków otwartych, nosi właśnie nazwę zbioru Cantora. Własności jego są interesujące. Wymieńmy je. Z konstrukcji zbioru widać, że jest on domknięty oraz nie zawiera żadnego przedziału. Ten ostatni fakt wyrażamy mówiąc, że jest on zbiorem nigdziegęstym. Zauważmy, że zbiór ten jest mocy kontinuum. Posiada więc, mówiąc potocznie, tyle samo elementów, co cały odcinek 01.[12] Jasne jest również, że nie można w przypadku zbioru Cantora mówić o punktach sąsiednich. Można jedynie wyróżnić dla niektórych tylko punktów sąsiadów jednostronnych, nie dwustronnych.

Przejdźmy obecnie do trzeciego przykładu. Weźmy w tym celu znany nam już zbiór Cantora, położony na odcinku 01, oraz punkt płaszczyzny euklidesowej o współrzędnych (1/2, 1/2). Połączmy następnie punkt (1/2, 1/2) z punktami zbioru Cantora odcinkami prostoliniowymi. Jeśli dany odcinek zawiera koniec wyjętego przedziału, to do budowanego obecnie zbioru zaliczymy tylko te punkty odcinka, których rzędne są wymierne. W przypadku przeciwnym zaliczymy do naszego zbioru te punkty odcinka, których rzędne są niewymierne. Tak powstały zbiór oznaczmy przez K[13]. Posiada on bardzo interesującą własność. Mianowicie jest to zbiór spójny. Posługując się terminologią filozoficzną powiedzielibyśmy, że jest on zbiorem ciągłym w tym sensie, że nie daje się rozłożyć na dwa podzbiory właściwe domknięte i rozłączne. Jego spójność jest jednak bardzo interesująca, a to z tego względu, że zbiór powyższy nie daje się przedstawić jako suma dwu podzbiorów spójnych rozłącznych i zawierających więcej niż jeden punkt. Nadto, jeśli z rozważanego zbioru usuniemy punkt (1/2, 1/2), to otrzymamy zbiór całkowicie niespójny, tzn. spójnymi jego częściami będą tylko poszczególne punkty. Zbiór ten posiada więc bardzo paradoksalne własności.[14]

[12] Ibid., s. 163.

[13] Przykład ten podali B. Knaster i K. Kuratowski. Zob. ich artykuł *Sur les ensembles connexes*, umieszczony w drugim tomie czasopisma „Fundamenta Mathematicae".

[14] Zob. C. K u r a t o w s k i, *Topologie II*, Warszawa—Wrocław 1950, s. 85.

3. Wnioski i propozycje terminologiczne. Postarajmy się obecnie zobaczyć, czy podane tu trzy przykłady tworów matematycznych dadzą się zaklasyfikować do którejś z kategorii ilości rozróżnionych przez Arystotelesa. Weźmy więc pod uwagę pierwszy przykład, tj. zbiór W. Z faktu, że jest on „podziurawiony" liczbami niewymiernymi wynika jego nieciągłość w sensie Arystotelesa. Nie można go jednak zaliczyć również ani do contiguum, ani do consequenter se habentia, gdyż nie można mówić o punktach sąsiednich. Nie ma takich. Przeto zbiór W nie podpada pod żaden z wymienionych przez Arystotelesa rodzajów ilości.

Drugi z rozpatrywanych zbiorów, czyli zbiór Cantora, w sposób oczywisty także nie jest zbiorem ciągłym w sensie Arystotelesa. Widać to wyraźnie z konstrukcji zbioru. Nie można go jednak z tych samych racji, co i zbioru W, zaliczyć do obu pozostałych rodzajów kategorii ilości. Mielibyśmy więc jeszcze jeden przykład zbioru nie mieszczącego się w arystotelesowskim podziale ilości.

Rozważmy teraz zbiór trzeci. Z matematycznego punktu widzenia jest on spójny. Czy można go jednak nazwać ciągłym (continuum) w sensie Arystotelesa? Wydaje się raczej, że nie. Dlaczego? Z tej racji, że elementami tworzącymi rozważany zbiór są „oddzielne" punkty, tzn. nie bierzemy całych odcinków łączących punkt (1/2, 1/2) z punktami zbioru Cantora, a tylko punkty bądź o odciętych wymiernych, bądź niewymiernych. Jest to, mówiąc potocznie, „dziurawy" zbiór. Ponieważ, dalej, nie można w zbiorze tym mówić o punktach sąsiednich, przeto nie może on być zaliczony i do obu pozostałych rodzajów ilości. Mielibyśmy więc trzeci przykład zbioru, który nie daje się zaklasyfikować według podziału Arystotelesa.

Warto tu wspomnieć, że podane przykłady zbiorów nie są czymś wyjątkowym w matematyce współczesnej. Tego rodzaju zbiorów matematyka dzisiejsza zna bardzo wiele. Są one w badaniach matematycznych czymś codziennym. Taki stan rzeczy pociąga za sobą konieczność dokonania rewizji podanego przez Arystotelesa podziału kategorii ilości. Nie można powtarzać tylko tego, co w tej dziedzinie powiedział kiedyś Arystoteles. Koniecznie należy uwzględnić wyniki uzyskane w matematyce współczesnej. Konsekwentnie więc pojawia się problem dokonania nowej klasyfikacji kategorii ilości. To jest pierwsza sprawa, jaka wynika ze współczesnego stanu matematyki.

Drugim zagadnieniem jest kwestia adekwatności określeń różnych rodzajów ilości podanych przez Arystotelesa. Czy dadzą się one utrzymać dziś? Przykład trzeci wydaje się wskazywać, że określenia Arystotelesa nie bardzo harmonizują z pojęciami, wypracowanymi w dzisiejszej matematyce, dokładniej mówiąc, w teoriomnogościowych działach matematyki. Osiągnięcia wspomnianych działów matematyki są dziś bezspornie uznane. Wynikałoby przeto stąd, że należałoby przepracować także i same określenia podane przez Arystotelesa. Okazuje się więc, że nie tylko podział arystotelesowski kategorii ilości nie może uchodzić za adekwatny, ale także i same wyróżnione rodzaje ilości nie wydają się być określone w sposób, który dziś uznalibyśmy za naukowo celowy i poprawny.

Jest sprawą nie ulegającą wątpliwości, że oba poruszone tu zagadnienia wzajemnie się ze sobą wiążą. Odróżnienie ich pozwala na łatwiejsze zorientowanie się w powstałej sytuacji, która wynikła z racji bujnego rozwoju działów teoriomnogościowych matematyki współczesnej.

Przejdźmy obecnie do zarysowania pewnych propozycji terminologicznych, wiążących się z omawianym tu zagadnieniem. Otóż wydaje się, że klasycznemu pojęciu ciągłości zbioru odpowiada teoriomnogościowe pojęcie spójności zbioru [15]. Konsekwentnie więc, wydaje się być właściwe przeniesienie tego pojęcia do ogólnej kategorii ilości. Należałoby zatem mówić nie o ilości ciągłej, ile raczej o ilości spójnej. Powiemy, że ilość $\underset{\sim}{Q}$ jest spójna, jeśli nie daje się przedstawić w postaci sumy rozłącznej dwóch ilości $\underset{\sim}{Q}_1$ i $\underset{\sim}{Q}_2$, będących ilościami tego samego rodzaju, co $\underset{\sim}{Q}$ [16]. Ilość, która nie jest spójna, zwać będziemy ilością niespójną. Podane przed chwilą określenie jest określeniem spójności w sensie integralnym. Wydaje się być właściwe wprowadzenie jeszcze pojęcia spójności lokalnej. Powiemy mianowicie, że ilość $\underset{\sim}{Q}$ jest lokalnie spójna w swoim elemencie q, jeżeli q mieści się we wnętrzu dowolnie małej ilości spójnej S. Jeżeli ilość $\underset{\sim}{Q}$ jest lokalnie spójna w każdym swoim elemencie, to mówimy po prostu, że jest lokalnie spójna. Można łatwo podać przykład tworu matematycznego, który jest spójny, ale nie jest lokalnie spójny.

Weźmy mianowicie punkt płaszczyzny (0,1) i połączmy go odcinkami z początkiem układu (0,0) oraz z punktami (1/n, 0) gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tak otrzymany zbiór jest oczywiście spójny, lecz nie jest lokalnie spójny. We wszystkich punktach postaci (0, y), gdzie $0 < y < 1$, zbiór ten nie jest lokalnie spójny [17].

Można by wprowadzić dalsze jeszcze specyfikacje pojęcia ilości. A więc np. można by mówić o ilości spójnej w pewnym wymiarze, o ilości łukowo spójnej, o ilości gęstej, dyskretnej itd. Czytelnik, znający elementy topologii teoriomnogościowej, bez trudu widzi tutaj, skąd te pojęcia zostały zaczerpnięte i jak można by je dalej specyfikować. Nie wydaje się to jed-

[15] Zob. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962 [2], s. 92.

[16] Por. mój artykuł *O pojęciu nieskończoności*, „Roczniki Filozoficzne",X (1962), z. 3, s. 107.

[17] Zob. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962 [2], s. 189.

nak konieczne dla celu tej noty. Toteż poprzestaniemy na wyżej powiedzianym. Krótko mówiąc chodzi o to, że została zaproponowana inna definicja ilości spójnej (w dawnej terminologii: ciągłej) aniżeli tradycyjna, pochodząca od Arystotelesa. Następnie zostały wprowadzone dwa pojęcia spójności, mianowicie w sensie integralnym i lokalnym. Pojęcia te mają pełną stosowalność we współczesnej nauce. Konsekwentnie więc możemy mówić o ilości spójnej i niespójnej w sensie integralnym i lokalnym.

4. Uwagi. Widzieliśmy, że neoscholastycy, podając przykłady różnych rodzajów ilości, spokojnie posługują się tworami matematycznymi. To upoważniło autora, aby rozważyć twory ze współczesnej matematyki, a nie ograniczać się jedynie do bardzo prostych i niemal banalnych przykładów z geometrii elementarnej. Wskutek takiego postępowania okazało się, że należy zmodyfikować i sam podział arystotelesowski kategorii ilości oraz określenia różnych rodzajów ilości. W ten sposób mamy konkretny przykład związku zachodzącego między naukami szczegółowymi (w tym wypadku — matematyką) a filozofią przyrody, a być może nawet i bardziej ogólnymi działami filozofii, tymi mianowicie, gdzie można mówić o specyfice różnych rodzajów ilości. Zatem błędne jest twierdzenie, że filozofię przyrody można uprawiać zupełnie niezależnie od współczesnych nauk szczegółowych. W praktyce zależność ta istnieje. Nadto należy uznać, że związek ten jest dla filozofii przyrody korzystny. Pozwala on na lepsze, bardziej precyzyjne ujmowanie niektórych zagadnień z zakresu filozofii przyrody. Wydaje się, że przez opracowywanie tego rodzaju konkretnych przypadków powiązań między filozofią przyrody a naukami szczegółowymi będzie można stopniowo dojść do możliwie ogólnego i naukowo uzasadnionego poglądu na rodzaj i wielkość wspomnianej zależności.[18] Innej drogi chyba nie ma. Chcieć rozwiązać interesujące nas zagadnienie przez wyjście z określeń, czym jest filozofia przyrody i czym są nauki szczegółowe, wydaje się zawierać w sobie znaczną dozę aprioryzmu.

REMARKS ON THE ARISTOTELIAN DIVISION OF CATEGORIES OF QUANTITY

Aristotle distinguished three kinds of categories of quantity: continuum, contiguum and consequenter se habens. The Stagyrite also gives their definitions. In this note it was shown that the Aristotelian division of quantity and the definitions themselves are no longer adequate today. In modern mathematics there are known sets which cannot be included in any of the kinds of quantities distinguished by Aristotle. In addition, the definitions themselves are not, in view of known concepts in settheoretical topology, sufficiently accurate and precise. In this note the distinction is proposed between a unified quantity in the integral and local sense. Definitions of the concepts mentioned are also given.

[18] Jako przyczynki mogą być uważane dwie następujące moje notki: *O pojęciu nieskończoności*, „Roczniki Filozoficzne", X (1962), z. 3, s. 103—110, oraz: *Zagadnienie arytmetyzacji kontinuum*, „Roczniki Filozoficzne", XI (1963), z. 3, s. 81—85.