ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXVI, zeszyt 3 — 1978

STANISŁAW MAZIERSKI

ANALIZA MATEMATYCZNA KOMÓRKI PSZCZELEJ

Już w starożytności greckiej i rzymskiej (Arystoteles, Pliniusz Starszy i inni) wzbudzała podziw budowana przez pszczoły komórka na miód. Plaster, w którym pszczoła ma gromadzić miód, składa się z dwóch warstw komórek — na pozór dość dziwnych kształtów — połączonych denkami nie będącymi płaszczyznami. Jedna i druga warstwa jest tak zbudowana, że pomiędzy ściankami poszczególnych komórek nie ma wolnych miejsc, a to świadczy o ekonomicznym wykorzystaniu miejsca ograniczonego rozmiarami ramki.

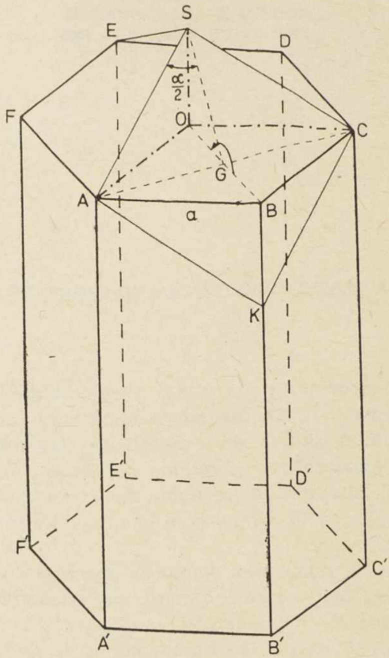
Przy wyborze kształtu i rozmiarów komórek pszczoła realizuje następujące postulaty: (1) zagospodarować dany „teren" ograniczony wielkością ramki w taki sposób, ażeby można było umieścić w nim maksymalną objętość miodu, (2) zużyć na ten cel minimalną ilość tworzywa (wosku). Zbadajmy, jak pszczoła realizuje swój program.

We wstępnej fazie rozważań dla uproszczenia przyjmiemy, że denko komórki jest płaskie. W tym przypadku komórka ma kształt graniastosłupa prawidłowego o podstawie sześciokąta foremnego. Budując tego rodzaju pojemnik na miód, pszczoła eliminuje ewentualne prześwity między komórkami. Prześwity takie wystąpiłyby, gdyby graniastosłupy zastąpić np. walcami o tej samej wysokości i tej samej powierzchni podstawy (czyli o tej samej objętości).

Już Pitagoras odkrył, że istnieją tylko trzy figury prawidłowe, które „szczelnie" do siebie przylegają, a mianowicie: trójkąt, kwadrat i sześciokąt foremny. Nasuwa się pytanie, dlaczego pszczoła „wybiera" — spośród innych graniastosłuów — graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego. Czy przez to coś zyskuje? Aby na te pytania odpowiedzieć, zestawmy i porównajmy ze sobą obwody trzech figur geometrycznych o tym samym polu S: obwód trójkąta równobocznego ($P_{\triangle}$), kwadratu ($P_{\square}$) i sześciokąta foremnego ($P_{\hexagon}$). Prosty rachunek pokazuje, że między wymienionymi obwodami zachodzą następujące relacje: $P_{\triangle} : P_{\square} : P_{\hexagon}$ 1 : 0,905 : 0,816.

A zatem obwód sześciokąta jest najmniejszy. W konsekwencji przy stałej wysokości graniastosłupa najmniejszą powierzchnię boczną ma graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego. Jeżeli więc chcemy zbudować graniastosłup o danej objętości i zużyć na niego minimum materiału, to musimy wybrać graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego.

Następny stap ekonomicznej konstrukcji komórki wyraża się w tym, że pszczoła zamiast denka płaskiego buduje denko złożone z trzech romboidalnych ścianek (odstępujemy obecnie od wyżej przyjętego dla uproszczenia założenia, że denko graniastosłupa jest płaskie), dzięki czemu zyskuje dodatkową oszczędność na tworzywie bez zmiany objętości naczynia. Zanalizujmy dokładniej ten element konstrukcji. W tym celu zetnijmy naroże graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez ACK



(rysunek). W ten sposób otrzymamy ostrosłup ACKB, który ustawiamy na reszcie graniastosłupa tak, aby B pokrywało się z O. Natomiast A i C pozostają w tym samym miejscu, a K zajmie miejsce H. Jeżeli podobnych cięć dokonamy wzdłuż osi AE i EC i pościnane ostrosłupy ustawimy podobnie jak poprzedni, wówczas otrzymamy ostateczną postać komórki pszczelej. Takie ustawienie ostrosłupów jest możliwe, gdyż AC i OB jako przekątne rombu AOCB dzielą się na połowy (stąd OG=BG). Dla dwóch pozostałych ostrosłupów rozważania są takie same. Należy zaznaczyć, że bez względu na to, gdzie umieścimy punkt K (dotyczy to również pozostałych ostrosłupów), objętość bryły nie ulegnie zmianie, ponieważ utworzona została z danego graniastosłupa o ustalonej objętości V. Nie jest zaś niezależna od wyboru tego punktu powierzchnia całkowita rozpatrywanej bryły (S_c całkowite).

Nasuwa się zatem pytanie, w którym miejscu należy dokonać cięcia (określonego przez odcinek BK = OH = x), przy którym bryła o objętości V przyjmie minimalną powierzchnię całkowitą. Zadanie to można rozwiązać za pomocą rachunku różniczkowego, jeśli tylko ustalimy zależność powierzchni S_c od x : $S_c = f_{(x)}$. Łatwo zauważyć, że całkowita powierzchnia bryły bez dolnej podstawy składa się z powierzchni 6 trapezów (powierzchnia boczna) oraz z 3 rombów (pow. górna).

Jeżeli bok sześciokąta foremnego oznaczymy przez r, wysokość zaś graniastosłupa przez h, (x = BK), to bez trudu obliczymy powierzchnię boczną $S_b = 3r\,(2h - x)$.

Powierzchnia zaś denka złożonego z 3 rombów wynosi $S_d = \dfrac{3\sqrt{3}\ r\sqrt{4x^2+r^2}}{2}$.

Wobec tego powierzchnia komórki bez denka przyjmie następującą wartość:

$$S_c = \left(\frac{\sqrt{3}\ \sqrt{4x^2+r^2}}{2} + 2h - x\right). \qquad (1)$$

Z załączonego rysunku widać, że od x będą zależały kąty rombu AHCK. Wobec tego zadanie wybrania odpowiedniego x_0 można zastąpić zadaniem wyboru odpowiednich, najekonomiczniejszych kątów rombu. Jeśli zatem x-owi przyporządkujemy jeden z kątów rombu ASCK, np. α, i oprzemy się na wzajemnych relacjach pomiędzy elementami tego rombu oraz rombu AOCB otrzymamy:

$$\frac{AG}{GK} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2+r^2}}.$$

Podstawiając x i $4x^2 + r^2$ z powyższego wzoru do (1), po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymujemy

$$(2) \qquad S_\alpha = 3r\left[\frac{r}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\left(3-\sqrt{3-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)+2h\right].$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy z (2) pochodną $\frac{ds}{d\alpha}$, która wynosi:

$$(3) \qquad \frac{d_s}{d_\alpha} = \frac{3r^2}{4}\left[\frac{\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-3}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Przyrównując ostatnie wyrażenie (3) do zera otrzymujemy równanie:

$$(4) \qquad 3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-1 = 0.$$

Rozwiązanie tego równania pozwala wyznaczyć kąty

$$(5) \qquad \alpha_{1/2} = \pm 180° \text{ i } \alpha_{3/4} = \pm 109°28',$$

dla których funkcja $S_{(\alpha)}$ przyjmuje wartości extremalne. W warunkach fizycznych interesuje nas bezwzględna wartość kąta, która się równa 109° 28'. Wynik $|\alpha_{1/2}| =$ 180° eliminujemy, ponieważ wtedy nie byłoby rombu. Obliczając drugą pochodną S_c względem α i podstawiając do niej wartości (5), dochodzimy do wniosku, że dla $|\alpha| = 109°\,28'$ pole powierzchni komórki *S* przyjmie wartość najmniejszą.

Paryski astronom Maraldi (XVIII w.) zmierzył kąty rombów i otrzymał następujące wyniki: 109° 28' i 70° 32'. Z kolei R. A. Reaumur zaproponował matematykowi Königowi rozwiązanie interesującego nas zadania, a mianowicie, jakie parametry powinno mieć naroże, ażeby można było otrzymać minimum powierzchni przy zachowaniu tej samej pojemności. Korzystając z rachunku różniczkowego König wykazał (1732 r.), że romby takiego naroża powinny mieć kąty o wartościach 109°26' i 70° 34'. W cztery lata później Mac Laurin wykrył drobny błąd w obliczeniach Königa i podał poprawione wartości owych kątów: 109° 28' i 70° 32', a więc takie wartości, które odpowiadają rzeczywistej budowie romboidalnej ścianki denka komórki pszczelej.

W końcowym wniosku stwierdzamy, że pszczoły budują komórki na miód z podziwu godną ekonomią. Używając do tego celu minimum materiału (tworzywa — wosku) osiągają maksymalną pojemność komórek.