ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXVIII, zeszyt 1 — 1980

LUDWIK BORKOWSKI

PEWNA WERSJA DEFINICJI KLASYCZNEGO POJĘCIA PRAWDY

Dość powszechnie jest znane i w praktyce dydaktycznej nieraz używane następujące określenie prawdziwości zdania: Zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy opisuje pewien stan rzeczy (stwierdza istnienie pewnego stanu rzeczy) i ten stan rzeczy istnieje (zachodzi). Formułuje się je też krócej w następujący sposób: Zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (zachodzi) stan rzeczy opisywany (stwierdzany) przez to zdanie.

Określenie to nie zostało dotąd sformułowane za pomocą pojęć logiki współczesnej. Uważa się bowiem, że formułując to określenie przyjmuje się założenie o istnieniu stanów rzeczy jako obiektów *sui generis*, i to takich, o jakich nie mówi się w logice współczesnej. Nie jest to słuszne. Zadaniem tego artykułu jest próba sformułowania tego określenia za pomocą pojęć używanych w logice współczesnej. Stany rzeczy traktuje się tu jako relacje pewnego rodzaju. Zapewne klasyczny zwolennik stanów rzeczy protestowałby przeciwko takiemu traktowaniu stanów rzeczy jako relacji. Stanowisko takie jest związane ze zbyt wąskim rozumieniem pojęcia relacji. W logice współczesnej pojęcie relacji jest jednak rozumiane szerzej. Każdy obiektywny korelat funktora zdaniotwórczego od co najmniej dwóch argumentów nazwowych lub predykatowych jest relacją. Nic więc nie stoi na przeszkodzie, by stany rzeczy zaliczać do relacji, przy tak szerokim rozumieniu pojęcia relacji.

Rozpatrzmy dwa przykłady.

Stanem rzeczy opisywanym przez zdanie „$3 > 2$" jest bycie większym liczby 3 od liczby 2. Ten stan rzeczy można rozumieć jako relację większością ograniczoną w dziedzinie do zbioru jednostkowego o elemencie 3, a w przeciwdziedzinie do zbioru jednostkowego o elemencie 2, a więc relację $\{3\}\ 1 > \restriction \{2\}$. Mówiąc tu o istnieniu (zachodzeniu) relacji będziemy mieć na myśli jej niepustość. Używając symboliki russellowskiej przyjmujemy dla relacji n-członowej $R^{(n)}$ równoważność:

$$E!\ R^{(n)} \equiv \underset{x_1, \ldots, x_n}{\exists} R^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \underset{x_1, \ldots, x_n}{\exists} \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R^{(n)}$$

Wyrażenie „$E!R^{(n)}$" czytamy: relacja $R^{(n)}$ istnieje (zachodzi). W tym sensie będziemy mówić o istnieniu (zachodzeniu) stanów rzeczy.

W myśl przytoczonego określenia zdanie „$3 > 2$" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stan rzeczy opisywany przez to zdanie, to jest gdy $E!\{3\}\,1 > \restriction \{2\}$, co jest równoważne zdaniu: $3 > 2$ (z uwagi na równoważności: $E!\{3\}\,1 > \restriction \{2\} \equiv \underset{x,\,y}{\exists} \langle x,y\rangle \in \{3\}\,1 > \restriction \{2\} \equiv$
$\equiv \underset{x,\,y}{\exists} (x=3 \wedge y=2 \wedge x > y) \equiv 3 > 2$).

Zdanie „ten stół jest biały" może być rozumiane jako zdanie „Ten stół należy do klasy przedmiotów białych" lub jako zdanie „Ten stół posiada cechę białości". Stanem rzeczy opisywanym przez rozważane zdanie w pierwszej interpretacji jest relacja $\{a\}\,1 \in \restriction \{A\}$, gdzie a = ten stół, A = klasa przedmiotów białych, zaś stała „$\in$" jest użyta w zwykłej interpretacji. Stanem rzeczy opisywanym przez rozważane zdanie w drugiej interpretacji jest relacja $\{a\}\,1 \in \restriction \{A\}$, gdzie a = ten stół, A = cecha białości, a wyrażenie „$a \in A$" czyta się: cecha A przysługuje przedmiotowi a (lub też: przedmiot a posiada cechę A). A więc stanem rzeczy opisywanym przez rozważane zdanie jest bycie białym tego stołu rozumiane jako przynależność tego stołu do klasy przedmiotów białych lub też jako posiadanie przez ten stół cechy białości.

Przykłady te wyjaśniają sens intuicyjny rozpatrywanego określenia, które z użyciem symboliki logicznej zostanie sformułowane w tym artykule.

Zdania złożone powstają bądź ze zdań prostszych przez łączenie ich funktorami rachunku zdań, bądź z form zdaniowych przez poprzedzanie ich kwantyfikatorami wiążącymi występujące w nich zmienne wolne. Trzeba więc ustalić, co opisują formy zdaniowe.

Podobnie jak zdania również i formy zdaniowe opisują pewne relacje. Jeśli np. zmienne a, b przebiegają zbiór liczb L, to forma zdaniowa „$a > b$" opisuje relację bycia większym liczby a od liczby b, gdzie a i b są dowolnymi liczbami należącymi do L, a więc relację $L1 > \restriction L$.

Definicję zdania prawdziwego sformułujemy dla schematycznego przykładu języka J pierwszego rzędu, w którym występują stałe predykaty: $P_1^{(n_1)}, \ldots, P_k^{(n_k)}$ (zbudowane z litery „P" ze stałymi wskaźnikami naturalnymi od 1 do k u dołu oraz ze stałymi wskaźnikami naturalnymi u góry oznaczającymi ilość argumentów), stałe nazwowe: $a_1, \ldots, a_l$ (zbudowane z litery „a" ze stałymi wskaźnikami naturalnymi od 1 do l u dołu), zmienne nazwowe: $x_1, x_2, \ldots$ (zbudowane z litery „x" ze stałymi wskaźnikami naturalnymi u dołu), funktory rachunku zdań i kwantyfikatory: $\forall, \exists$.

Przyjmujemy, że B jest określoną niepustą klasą. $B^1 = B$, $B^2 = B \times B$, $B^{n+1} = B^n \times B$. Przez n-członową relację $R^{(n)}$ rozumiemy jakąś podklasę klasy B^n, dla $n \geqslant 1$. Stąd wynika, że $R^{(1)}$ jest jakąś podklasą klasy B, zaś

dla $n \geqslant 2$ $R^{(n)}$ jest jakąś klasą n-członowych układów uporządkowanych, których elementy należą do B. Przyjmujemy, że funkcja interpretująca (wartościująca) f przyporządkowuje dla $1 \leqslant i \leqslant l$ stałej a_i element c_i należący do B, n-argumentowemu predykatowi $P_i^{(n)}$ — n-członową relację $R_i^{(n)}$ (dla $1 \leqslant i \leqslant k$), a zmiennej x_i element b_i należący do B.

W metajęzyku języka J używamy symboli: a_i, $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ (zbudowanych z litery „a" i zmiennych wskaźników naturalnych u dołu), dla oznaczania dowolnych stałych nazwowych języka J, symboli: x_i, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ (zbudowanych z litery „x" i zmiennych wskaźników naturalnych u dołu), dla oznaczania dowolnych zmiennych nazwowych języka J, symboli: $v_1, \ldots, v_n, \ldots, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ (zbudowanych z litery „v" i stałych lub zmiennych wskaźników naturalnych u dołu), dla oznaczania dowolnych stałych nazwowych lub zmiennych nazwowych języka J. Symbolu „$P_i^{(n)}$" używamy jako zmiennej metajęzyka reprezentującej nazwy stałych predykatów języka J.

Stałe: $c_1, \ldots, c_l$ (zbudowane z litery „c" i stałych wskaźników naturalnych od 1 do l u dołu) są stałymi metajęzyka J będącymi odpowiednio przekładami stałych: $a_1, \ldots, a_l$ języka J. Symbole: $b_1, \ldots, b_n, \ldots, b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, \ldots$ (zbudowane z litery „b" ze stałymi lub zmiennymi wskaźnikami naturalnymi u dołu) oraz litera „b" są zmiennymi metajęzyka J przebiegającymi klasę B. Symbole: $R_1^{(n_1)}, \ldots, R_k^{(n_k)}$ (zbudowane z litery „R" ze stałymi wskaźnikami naturalnymi od 1 do k u dołu i ze stałymi wskaźnikami naturalnymi u góry oznaczającymi ilość argumentów) są odpowiednio przekładami stałych: $P_1^{(n_1)}, \ldots, P_k^{(n_k)}$ języka J. Symbole: $R^{(n)}, Q^{(n)}, R_i^{(n)}, Q_i^{(n)}$ (zbudowane z liter „R", „Q" ze zmiennymi wskaźnikami naturalnymi u dołu lub bez takich wskaźników oraz z naturalnymi wskaźnikami u góry) są zmiennymi metajęzyka J przebiegającymi klasę n-członowych relacji zawartych w B^n, dla $n \geqslant 1$. Zmienne: $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ są zmiennymi metajęzyka J przebiegającymi klasę podklas klasy B. Liter φ, ψ używamy w metajęzyku J dla oznaczania wyrażeń zdaniowych języka J, które mogą być zdaniami (wyrażeniami zdaniowymi nie zawierającymi zmiennych wolnych) lub formami zdaniowymi (wyrażeniami zdaniowymi zawierającymi zmienne wolne). Wyrażenie $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ jest formą zdaniową o zmiennych wolnych $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ tj. formą zdaniową, której wszystkimi zmiennymi wolnymi są zmienne $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$.

Wprowadzimy obecnie pewne określenia (należące do metajęzyka J), z których będziemy w dalszym ciągu korzystać.

W definicjach D1—D6 przyjmujemy, że $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$.

D1 $R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n = R^{(n)} \cap (A_1 x \ldots x A_n)$

Relacja $R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n$ jest relacją $R^{(n)}$ ograniczoną w 1-ej dziedzinie do klasy A_1, w 2-ej dziedzinie do klasy A_2, ..., w n-tej dziedzinie do klasy A_n.

D2 $R^{(n)} b_1, \ldots, b_n = R^{(n)} | \{b_1\} x \ldots x \{b_n\}$

Relację $R^{(n)} b_1, \ldots, b_n$ nazwiemy relacją $R^{(n)}$ ograniczoną do ciągu przedmiotów $b_1, \ldots, b_n$.

Dla $n=1$: $R^{(1)} b_1 = R^{(1)} \cap \{b_1\}$

Można udowodnić, że:

$$E!R^{(1)} b_1 \equiv \underset{b}{\exists}\ b \in R^{(1)} b_1 \equiv \underset{b}{\exists} (b = b_1 \wedge b \in R^{(1)}) \equiv$$
$$\equiv b_1 \in R^{(1)} \equiv E!\{b_1\} 1 \in \restriction \{R^{(1)}\}$$

Zauważmy, że klasa $R^{(n)} b_1, \ldots, b_n$ jest bądź klasą jednostkową, gdy $< b_1, \ldots, b_n > \in R^{(n)}$, bądź klasą pustą, gdy $< b_1, \ldots, b_n > \bar{\in} R^{(n)}$.

D3 $< b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+m} > \in R^{(n)} \cdot Q^{(m)} \equiv$
$\equiv < b_1, \ldots, b_n > \in R^{(n)} \wedge < b_{n+1}, \ldots, b_{n+m} > \in Q^{(m)}$

D4 $< b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+m} > \in R^{(n)} + Q^{(m)} \equiv$
$\equiv < b_1, \ldots, b_n > \in R^{(n)} \vee < b_{n+1}, \ldots, b_{n+m} > \in Q^{(m)}$

Relację określoną w D3 nazwiemy rozszerzonym iloczynem relacji $R^{(n)}$ i $Q^{(m)}$, zaś relację określoną w D4 — rozszerzoną sumą relacji $R^{(n)}$ i $Q^{(m)}$. Rozszerzony iloczyn i rozszerzona suma relacji n-członowej i relacji m-członowej jest relacją n+m-członową.

W D5 i D6 przyjmujemy, że $1 \leqslant i \leqslant n$.

D5 $< b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n > \in R^{(n)} \underset{gen}{i} \equiv$
$\equiv \underset{b_i \in B}{\forall} < b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n > \in R^{(n)}$

D6 $< b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n > \in R^{(n)} \underset{ex}{i} \equiv$
$\equiv \underset{b_i \in B}{\exists} < b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_n > \in R^{(n)}$

Operację określoną w D5 nazywa się generalizacją relacji $R^{(n)}$ względem i-tego argumentu, operację określoną w D6 nazywa się partykularyzacją relacji $R^{(n)}$ względem i-go argumentu. Operacje te zastosowane

do relacji n-członowych dają w wyniku relacje n-1-członowe w przypadku gdy $n > 1$.

Dla $n = 1$ przyjmujemy określenia:

D5a $\quad R^{(1)}{}^{1}_{gen} = B \equiv \forall_{b_1 \in B} \; b_1 \in R^{(1)}$

D5b $\quad R^{(1)}{}^{1}_{gen} = \emptyset \equiv \sim\forall_{b_1 \in B} \; b_1 \in R^{(1)}$

D6a $\quad R^{(1)}{}^{1}_{ex} = B \equiv \exists_{b_1 \in B} \; b_1 \in R^{(1)}$

D6b $\quad R^{(1)}{}^{1}_{ex} = \emptyset \equiv \sim\exists_{b_1 \in B} \; b_1 \in R^{(1)}$

Wyrażenia " $\forall_{b_1 \in B} \; b_1 \in R^{(1)}$ ", " $\exists_{b_1 \in B} \; b_1 \in R^{(1)}$ " są — przy ustalonym $R^{(1)}$ — zdaniami prawdziwymi lub fałszywymi. Stąd oraz z tez: $\{b : p\} = V \equiv p$, $\{b : p\} = \emptyset \equiv \sim p$ wynika, że każda z klas $R^{(1)}{}^{1}_{gen}$, $R^{(1)}{}^{1}_{ex}$ jest bądź klasą uniwersalną bądź klasą pustą, przy czym na gruncie przyjętych oznaczeń $V = B$.

W D7 przyjmujemy, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

D7 $\quad < b_1, \ldots, b_i, \ldots b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n > \in R^{(n)}((id: i.j) \equiv$
$\equiv < b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_{j-1}, b_i, b_{j+1}, \ldots, b_n > \in R^{(n)}$

Operacja określona w D7 nazywa się utożsamieniem (identyfikacją) i-go i j-go argumentu relacji $R^{(n)}$. Zastosowanie tej operacji do relacji n-członowej daje w wyniku relację n-1-członową [1].

Relację otrzymaną z relacji $R^{(n)}$ przez utożsamienie argumentów t_1 z m_1, t_2 z m_2, ..., t_s z m_s, a więc przez s-krotne zastosowanie operacji utożsamiania argumentów, oznaczymy przez $R^{(n)}(id: t_1, m_1; t_2, m_2; \ldots; t_s, m_s)$.

Relację $R^{(n)}$ ograniczoną w s_1-ej dziedzinie do klasy A_{s_1}, ..., w s_r-ej dziedzinie do klasy A_{r_s} (gdzie $s_1, \ldots, s_r$ są jakimiś liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leqslant s_1, \ldots, s_r \leqslant n$) oznaczamy przez $R^{(n)}$ (res: $s_1, A_{s_1}; \ldots; s_r, A_{s_r}$) Relacja taka jest równa relacji $R^{(n)}$ ograniczonej w dziedzinach $s_1, \ldots, s_r$ odpowiednio do klas $A_{s_1}, \ldots, A_s$, a w pozostałych dziedzinach do klasy B.

---

[1] Określenia pojęć wprowadzonych w D3—D7 znaleźć można np. w pracy: A. Mostowski: *O zdaniach nierozstrzygalnych w sformalizowanych systemach matematyki.* „Kwartalnik Filozoficzny" 16:1946 s. 233-277.

Można więc ją podciągnąć pod ogólną postać relacji $R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n$. Pod tę postać można też podciągnąć relację $R^{(n)}$, gdyż $R^{(n)} = R^{(n)} B^n$, bo $R^{(n)} \subset B^n$. Zauważmy, że pod podaną ogólną postać podpadają też relacje o postaci $(-R^{(n)}) A_1 x \ldots x A_n$.

D8. Bierzemy pod uwagę najmniejszą klasę, do której należą relacje równe relacjom o postaci $R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n$ i która jest zamknięta ze względu na operacje tworzenia rozszerzonego iloczynu, rozszerzonej sumy, generalizacji, partykularyzacji, utożsamiania argumentów, ograniczania dziedzin. Dla elementów tej klasy definiujemy indukcyjnie operację d:

1. $d\, R^{(n)} = -R^{(n)}$
2. $d\left(R^{(n)}{}^{1}_{gen}\right) = \left(dR^{(n)}\right)^{1}_{ex}$
3. $d\left(R^{(n)}{}^{1}_{ex}\right) = \left(dR^{(n)}\right)^{1}_{gen}$
4. $d(R^{(n)}\,(id{:}t_1, m_1; \ldots; t_s, m_s)) = (dR^{(n)})\,(id{:}t_1, m_1; \ldots; t_s, m_s)$
5. $d(R^{(n)} \mid A_1 x \ldots x A_n) = (dR^{(n)}) \mid A_1 x \ldots x A_n$
6. $d\left(R^{(n)}\,(res{:}\ s_1, A_{s_1}; \ldots, s_r, A_{s_r})\right) = \left(dR^{(n)}\right)(res{:}\ s_1, A_{s_1}; \ldots; s_r, A_{s_r})$
7. $d(R+Q) = dR \cdot dQ$
8. $d(R \cdot Q) = dR + dQ$

Stąd wynikają następujące równości:

$$d\left(R^{(n)}{}^{i}_{gen}\right) = -\left(R^{(n)}{}^{i}_{gen}\right)$$
$$d\left(R^{(n)}{}^{i}_{ex}\right) = -\left(R^{(n)}{}^{i}_{ex}\right)$$
$$d(R^{(n)} \mid A_1 x \ldots x A_n) = (-R^{(n)})\ A_1 x \ldots x A_n$$
$$d(R^{(n)}\ (id{:}t_1, m_1; \ldots; t_s, m_s)) = (-R^{(n)})\ (id{:}t_1, m_1; \ldots; t_s, m_s)$$
$$d(R^{(n)}\ A_1 x \ldots x A_n \cdot Q^{(m)}\ A_{n+1} x \ldots x A_{n+m}) =$$
$$= (-R^{(n)})\ A_1 x \ldots x A_n + (-Q^{(m)})\ A_{n+1} \ldots x A_{n+m}$$
$$d(R^{(n)}\ A_1 x \ldots x A_n + Q^{(m)}\ A_{n+1} x \ldots x A_{n+m}) =$$
$$= (-R^{(n)})\ A_1 x \ldots x A_n \cdot (-Q^{(m)})\ A_{n+1} x \ldots x A_{n+m}$$

Na podstawie wprowadzonych definicji można udowodnić następujące twierdzenia:

L1 $E!(R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n \cdot Q^{(m)} A_{n+1} x \ldots x A_{n+m}) \equiv$
$\equiv E!R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n \wedge E!Q^{(m)} A_{n+1} x \ldots x A_{n+m}$

L2 $E!(R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n + Q^{(m)} A_{n+1} x \ldots x A_{n+m}) \equiv$
$\equiv E!R^{(n)} A_1 x \ldots x A_n \vee E!Q^{(m)} A_{n+1} x \ldots x A_{n+m}$

L3a $E!(-R^{(n)})|b_1, \ldots, b_n \equiv \sim E!R^{(n)}|b_1, \ldots, b_n$

L3b $E!-(R^{(1)}{}^{1}_{gen}) \equiv \sim E!\,R^{(1)}{}^{1}_{gen}$

L3c $E!-(R^{(1)}{}^{1}_{ex}) = \sim E!R^{(1)}{}^{1}_{ex}$

L3d $E!((-R^{(n)})\,b_1, \ldots, b_n + (-Q^{(m)})\,b_{n+1}, \ldots, b_{n+m}) \equiv$
$\equiv \sim E!(R^{(n)}\,b_1, \ldots, b_n \cdot Q^{(m)}\,b_{n+1}, \ldots, b_{n+m})$

L3e $E!((-R^{(n)})\,b_1, \ldots, b_n \cdot (-Q^{(m)})\,b_{n+1}, \ldots, b_{n+m}) \equiv$
$\equiv \sim E!(R^{(n)}\,b_1, \ldots, b_n + Q^{(m)}\,b_{n+1}, \ldots, b_{n+m})$

L4. Jeśli R należy do najmniejszej klasy, do której należą klasy o postaci $Q^{(1)}{}^{1}_{gen}$, $Q^{(1)}{}^{1}_{ex}$, relacje o postaci $Q^{(n)}\,b_1, \ldots, b_n$, gdzie $n \geqslant 1$, i która jest zamknięta ze względu na operacje tworzenia rozszerzonego iloczynu i rozszerzonej sumy oraz operację d, określoną w D8, to: $E!dR \equiv \sim E!R$.

L5a $E!R^{(1)}{}^{1}_{gen} \equiv R^{(1)}{}^{1}_{gen} = B \equiv \forall_{b_i \in B}\, b_i \in R^{(1)} \equiv \forall_{bi \in B}\, b_i \in R^{(1)}$

L5b $E!R^{(i)}{}^{1}_{ex} \equiv R^{(1)}{}^{1}_{ex} = B \equiv \exists_{b_i \in B}\, b_i \in R^{(1)} \equiv \exists_{bi \in B}\, b_i \in R^{(1)}$

Podajemy indukcyjną definicję zdania i formy zdaniowej języka J.

DI.1a. $\ulcorner P^{(n)}_{i}\,(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})\urcorner$ jest zdaniem.

1b. Jeśli w ciągu $v_1, \ldots, v_n$ występuje co najmniej jedna zmienna, to $\ulcorner P^{(n)}_{i}\,(v_1, \ldots, v_n)\urcorner$ jest formą zdaniową.

2a. Jeśli φ jest zdaniem, to $\ulcorner \sim\varphi \urcorner$ jest zdaniem.

2b. Jeśli φ i ψ są zdaniami, to $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner$, $\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner$, $\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner$, $\ulcorner \varphi \equiv \psi \urcorner$ są zdaniami.

3a. Jeśli φ jest formą zdaniową, to $\ulcorner \sim\varphi \urcorner$ jest formą zdaniową.

3b. Jeśli φ lub ψ jest formą zdaniową, to $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner$, $\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner$, $\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner$, $\ulcorner \varphi \equiv \psi \urcorner$ są formami zdaniowymi.

4a. Jeśli $\varphi(x_i)$ jest formą zdaniową o dokładnie jednej zmiennej wolnej x_i, to $\ulcorner \forall_{x_i}\, \varphi(x_i) \urcorner$, $\ulcorner \exists_{x_i}\, \varphi(x_i) \urcorner$ są zdaniami.

4b. Jeśli $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ jest formą zdaniową o co najmniej dwóch zmiennych wolnych, zaś $i_1 \leqslant i \leqslant i_n$, to $\ulcorner \forall_{x_i}\, \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \urcorner$, $\ulcorner \exists_{x_i}\, \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \urcorner$ są formami zdaniowymi.

W powyższej definicji w punkcie 1a określa się zdania atomiczne, w punkcie 1b formy zdaniowe atomiczne. W punktach 2 i 3 określa się zdania oraz formy zdaniowe tworzone za pomocą funktorów rachunku zdań. W punkcie 4 określa się zdania i formy zdaniowe tworzone z form zdaniowych za pomocą kwantyfikatorów.

Mamy do wyboru dwie możliwości: albo zdefiniować relację semantyczną zachodzącą między wyrażeniem zdaniowym (zdaniem lub formą zdaniową) a stanem rzeczy opisywanym przez to wyrażenie, albo też zdefiniować funkcję, która zdaniom oraz formom zdaniowym przyporządkowuje opisywane przez nie stany rzeczy.

Wybierzemy tę drugą ewentualność.

Definicja tej funkcji będzie definicją indukcyjną (z uwagi na to, że pojęcie zdania i formy zdaniowej języka J jest też zdefiniowane indukcyjnie).

DII.1. Atomicznym wyrażeniem zdaniowym języka J jest wyrażenie o postaci (A) $\ulcorner P_i^{(n)}(v_1, \ldots, v_n)\urcorner$, zbudowane z predykatu $P_i^{(n)}$ i ciągu jego argumentów $v_1, \ldots, v_n$. Można odróżnić pięć przypadków, w których określimy funkcję $S(\varphi)$ dla wyrażeń atomicznych języka J [2].

a) W wyrażeniu (A) wszystkie argumenty są stałymi nazwowymi, a więc (A) ma postać: $\ulcorner P_i^{(n)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})\urcorner$.
Wtedy $S(\ulcorner P_i^{(n)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})\urcorner) = R_i^{(n)}(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}$

b) W wyrażeniu (A) ciąg argumentów jest różnowartościowym ciągiem zmiennych nazwowych.
Wtedy $S(\ulcorner P_i^{(n)}(v_1, \ldots, v_n)\urcorner) = R_i^{(n)}$

c) Argumentami predykatu $P_i^{(n)}$ w (A) są tylko zmienne, ale niektóre z nich są utożsamione (powtarzają się). Przyjmijmy, że w (A) są utożsamione ze sobą następujące argumenty: t_1 z m_1, t_2 z m_2, ..., t_s z m_s, i że są to wszystkie utożsamienia argumentów występujących w (A). Wtedy $S(\ulcorner P_i^{(n)}(v_1, \ldots, v_n)\urcorner) = R_i^{(n)}$ (id: t_1, m_1; t_2, m_2; ...; t_s, m_s)

d) W ciągu argumentów w (A) występują stałe nazwowe oraz zmienne nazwowe nie powtarzające się. Przyjmijmy, że ciąg $v_{s_1}, \ldots, v_{s_r}$ jest podciągiem ciągu $v_1, \ldots, v_n$ utworzonym z wszystkich kolejnych (ewentualnie powtarzających się) stałych nazwowych występujących w ciągu $v_1, \ldots, v_n$ oraz że $v_{s_1} = a_{j_1}, \ldots, v_{s_r} = a_{j_r}$.

---

[2] Można by próbować podać jednolite określenie, ale formalny jego zapis byłby skomplikowany.

Wtedy $S\left(\ulcorner P_i^{(n)}(v_1, \ldots, v_n)\urcorner\right) = R_i^{(n)}(\text{res: } s_1, \{c_{j_1}\}; \ldots; s_r, \{c_{j_r}\})$

e) W ciągu argumentów w (A) występują stałe nazwowe oraz zmienne nazwowe, przy czym pewne zmienne nazwowe są utożsamione. Przyjmijmy, że ciąg $v_{s_1}, \ldots, v_{s_r}$ jest rozumiany tak jak w przypadku d) oraz że w (A) utożsamione są ze sobą następujące argumenty będące zmiennymi: t_1 z m_1, t_2 z m_2, ..., t_s z m_s, i że są to wszystkie utożsamienia zmiennych występujące w (A).

Wtedy $S\left(\ulcorner P_i^{(n)}(v_1, \ldots, v_n)\urcorner\right) =$
$= \left(R_i^{(n)}(\text{res: } s_1, \{c_{j_1}\}, \ldots; s_r, \{c_{j_r}\})\right)(\text{id: } t_1, m_1; t_2, m_2; \ldots; t_s, m_s)$

Wyróżnione przypadki zilustrujemy następującymi przykładami:

a) $S(''P_1^3(a_2, a_3, a_2)'') = R_1^3 | c_2, c_3, c_2$

b) $S(''P_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3)'') = R_1^{(3)}$

c) $S(''P_2^{(5)}(x_2, x_3, x_2, x_3, x_2)'') = R_2^{(5)}$ (id: 1, 3; 1, 5; 2, 4)

d) $S(''P_3^{(4)}(x_2, a_2, x_3, a_3)'') = R_3^{(4)}$ (res: 2, $\{c_2\}$; 4, $\{c_3\}$)

e) $S(''P_4^{(6)}(x_2, a_3, x_2, a_5, x_3, x_3)'') =$
$= \left(R_4^{(6)}\right.$ (res: 2, $\{c_3\}$; 4, $\{c_5\}$)) (id: 1, 3; 5, 6)

DII.2a. $S(\ulcorner \sim \varphi \urcorner) = d(S(\varphi))$

2b. $S(\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner) = S(\varphi) \cdot S(\psi)$

2c. $S(\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner) = S(\varphi) + S(\psi)$

3. Jeśli $S(\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) = R^{(n)}$ oraz $i_1 \leqslant i \leqslant i_n$, $n \geqslant 1$, to:

a. $S\left(\ulcorner \forall_{x_i} \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})\urcorner\right) = R_{gen}^{(n)\,i}$

b. $S\left(\ulcorner \exists_{x_i} \varphi(_{i_1}, \ldots, x_{i_n})\urcorner\right) = R_{ex}^{(n)\,i}$

Podamy kilka uwag mających uwyraźnić sens intuicyjny definicji DII.

Wyrażenie „S(φ)" oznacza stan rzeczy opisywany przez wyrażenie zdaniowe φ.

W punkcie 1a określa się stan rzeczy opisywany przez zdanie atomiczne. Stanem rzeczy opisywanym przez zdanie atomiczne zbudowane z n-argumentowego predykatu $P_i^{(n)}$ i ciągu n jego argumentów $a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}$, będących stałymi nazwowymi, jest relacja $R_i^{(n)}$ przyporządkowana przez funkcję interpretującą predykatowi $P_i^{(n)}$, ograniczona do ciągu przedmiotów $c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}$, oznaczanych odpowiednio przez stałe nazwowe $a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}$.

W punktach 1b-e określa się stany rzeczy opisywane przez formy zdaniowe atomiczne. Są nimi odpowiednie relacje.

W myśl 2a stan rzeczy opisywany przez negację wyrażenia zdaniowego φ jest otrzymany przez przekształcenie d, określone w definicji D8, ze stanu rzeczy opisywanego przez wyrażenie φ.

W myśl 2b stan rzeczy opisywany przez koniunkcję dwóch wyrażeń zdaniowych jest rozszerzonym iloczynem stanów rzeczy opisywanych przez człony tej koniunkcji.

W myśl 2c stan rzeczy opisywany przez alternatywę dwóch wyrażeń zdaniowych jest rozszerzoną sumą stanów rzeczy opisywanych przez człony tej alternatywy.

W punkcie 3 określa się stany rzeczy opisywane przez wyrażenia zdaniowe zaczynające się od kwantyfikatora ogólnego lub szczegółowego. Stanem rzeczy opisywanym przez takie wyrażenie jest generalizacja (partykularyzacja) relacji opisywanej przez formę zdaniową będącą zasięgiem kwantyfikatora ogólnego (szczegółowego). Jeśli w 3a, b przyjmiemy, że $n=1$, to otrzymamy określenie stanu rzeczy opisywanego przez zdanie zaczynające się od kwantyfikatora ogólnego lub szczegółowego.

Określenie stanu rzeczy opisywanego przez implikację i równoważność można wyprowadzić z DII.2 oraz stąd, że implikację $\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner$ można określić jako $\ulcorner \sim \varphi \vee \psi \urcorner$, a równoważność $\ulcorner \varphi \equiv \psi \urcorner$ można określić jako $\ulcorner (\sim \varphi \vee \psi) \wedge (\sim \psi \vee \varphi) \urcorner$.

Z definicji DII wynika, że stany rzeczy opisywane przez zdania języka J należą do klasy, o której jest mowa w L4. Stąd oraz z L1, L2, L4 i DII.2a—c wynika:

L6. Jeśli φ, ψ są zdaniami, to:

a. $E!S(\ulcorner \sim \varphi \urcorner) \equiv \sim E!S(\varphi)$

b. $E!S(\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner) \equiv E!S(\varphi) \wedge E!S(\psi)$

c. $E!S(\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner) \equiv E!S(\varphi) \vee E!S(\psi)$

DIII. φ jest zdaniem prawdziwym $\equiv E!S(\varphi)$

W myśl DIII zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stan rzeczy opisywany przez to zdanie.
z DIII oraz L6 wynika:

Tw. 1a. $\ulcorner \sim \varphi \urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv \varphi$ nie jest zdaniem prawdziwym.

Tw. 1b. $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv \varphi$ jest zdaniem prawdziwym i ψ jest zdaniem prawdziwym.

Tw. 1c. $\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv \varphi$ jest zdaniem prawdziwym lub ψ jest zdaniem prawdziwym.

W Tw. 1a—c sformułowane są związki określane przez tabelki zerojedynkowe negacji, koniunkcji i alternatywy. Widać stąd, że na podstawie Tw. 1a-c (oraz definicji implikacji i równoważności) można udowodnić wszystkie metalogicznie sformułowane prawa klasycznego rachunku zdań (stwierdzające, że prawdziwe są zdania języka J o określonej postaci, podpadające pod schematy praw rachunku zdań).

Tw. 2. W metajęzyku języka J można na podstawie DIII udowodnić każdą równoważność o postaci:

φ jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z$,

gdzie φ jest nazwą zdania języka J, zaś „Z" jest przekładem tego zdania na metajęzyk [3].

Dowód Tw. 2 jest indukcyjny.

1°	Tw. 2 jest prawdziwe dla zdań atomicznych na podstawie DII. 1a.		
2°	1	φ jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z$	z. ind.
	2	φ nie jest zdaniem prawdziwym $\equiv \sim Z$	1
		$\ulcorner \sim \varphi \urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv \sim Z$	Tw. 1a, 2
3°	1	φ_1 jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z_1$	z. ind.
	2	φ_2 jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z_2$	
	3	φ_1 jest zdaniem prawdziwym $\wedge \varphi_2$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z_1 \wedge Z_2$	1, 2
		$\ulcorner \varphi_1 \wedge \varphi_2 \urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z_1 \wedge Z_2$	Tw. 1b, 3
4°	1	φ_1 jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z_1$	z. ind.
	2	φ_2 jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z_2$	
	3	φ_1 jest zdaniem prawdziwym $\vee \varphi_2$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv Z_1 \vee Z_2$	1, 2

[3] Przekład wyrażeń języka na metajęzyk jest wyznaczony przez funkcję f.

$\ulcorner\varphi_1 \vee \varphi_2\urcorner$ jest zdaniem prawdziwym
$\equiv Z_1 \vee Z_2$ Tw. 1c, 3

5° Załóżmy, że $S(\varphi(x_i)) = R^{(1)}$. Wtedy przekładem wyrażenia $\varphi(x_i)$ na metajęzyk jest wyrażenie „$b_i \in R^{(1)}$"[4], zaś przekładami wyrażeń $\ulcorner\forall_{x_i} \varphi(x_i)\urcorner$, $\ulcorner\exists_{x_i} \varphi(x_i)\urcorner$ na metajęzyk są odpowiednio wyrażenia "$\forall_{b_i \in B} b_i \in R^{(1)}$", "$\exists_{b_i \in B} b_i \in R^{(1)}$"

Wówczas:

a. $\ulcorner\forall_{x_i} \varphi(x_i)\urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv E!R^{(1)}{}^{1}_{gen} \equiv \forall_{b_i \in B} b_i \in R^{(1)}$

(DIII, DII.3a, L5a)

b. $\ulcorner\exists_{x_i} \varphi(x_i)\urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv E!R^{(1)}{}^{1}_{ex} \equiv \exists_{b_i \in B} b_i \in R^{(1)}$

(DIII, DII.3b, L5b)

Dowodząc Tw. 2 udowodniliśmy tzw. warunek merytorycznej trafności definicji zdania prawdziwego.

Można by w definicji DII wprowadzić oznaczenie „$S_{B,f}(\varphi)$" i mówić o stanie rzeczy opisywanym przez wyrażenie φ w klasie B przy interpretacji f. Wtedy w DIII mówilibyśmy o prawdziwości zdania φ w klasie B przy interpretacji f.

Dla uproszczenia definicja DII została sformułowana dla języków pierwszego rzędu. Otrzymujemy z niej definicję dla języków wyższych rzędów uogólniając warunki DII.1a-e na wyrażenia atomiczne tych rzędów, które występują w danym języku. Oczywiście wymaga to odpowiedniego rozszerzenia funkcji interpretującej na wszystkie stałe pozalogiczne i zmienne różnych kategorii składniowych występujące w danym języku.

Zauważymy, że stany rzeczy opisywane przez zdania równoważne (tj. mające tę samą wartość logiczną) lub nawet logicznie równoważne (tj. wynikające logicznie wzajemnie ze siebie) nie muszą być identyczne. Np. zdania „$3 > 2$" i „$2 < 3$" są równoważne, ale stany rzeczy opisywane przez te zdania, a mianowicie $>|3,2$, $<|2,3$, nie są identyczne. Podobnie zdania "$P^{(2)}_1 (a_1, a_2) \wedge P^{(3)}_2 (a_3, a_4, a_5)$" i "$P^{(3)}_2 (a_3, a_4, a_5) \wedge P^{(2)}_1 (a_1, a_2)$", w których stałe nazwowe oznaczają różne przedmioty, są logicznie równoważne, ale stany rzeczy opisywane przez te zdania nie są identyczne.

Wydaje się, że jest to zgodne z intuicją. Na to, by zdania φ i ψ były równoważne, potrzeba i wystarcza, by prawdziwa była równoważność: $E!S(\varphi) \equiv E!S(\psi)$, natomiast nie jest konieczne, by $S(\varphi) = S(\psi)$.

Można to udowodnić indukcyjnie.

Zwrócimy jeszcze uwagę na to, w jaki sposób można za pomocą wprowadzonych pojęć określić prawdziwość formy zdaniowej i spełnianie formy zdaniowej przez ciąg przedmiotów.

Oto proponowane określenia (przypomnijmy, że w myśl przyjętych oznaczeń $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ jest formą zdaniową o n zmiennych wolnych):

$\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ jest formą zdaniową prawdziwą $\equiv B^n \subset S(\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}))$

$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ spełnia formę zdaniową $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \equiv$
$\equiv \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in S(\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}))$

Innymi słowy. Przyjmijmy, że $S(\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) = R^{(n)}$. Wtedy:

$\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ jest formą zdaniową prawdziwą $\equiv B^n \subset R^{(n)}$
$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ spełnia $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \equiv \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in R^{(n)}$

Stąd wynika:

$\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ jest formą zdaniową prawdziwą $\equiv$ każdy n-wyrazowy ciąg $b_1, \ldots, b_n$ spełnia $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$.

Z wprowadzonych określeń oraz L5 wynika, że:

a. $\ulcorner \bigwedge_{x_i} \varphi(x_i) \urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv \varphi(x_i)$ jest formą zdaniową prawdziwą $\equiv$ każdy element klasy B spełnia $\varphi(x_i)$.

b. $\ulcorner \bigvee_{x_i} \varphi(x_i) \urcorner$ jest zdaniem prawdziwym $\equiv$ pewien element klasy B spełnia $\varphi(x_i)$.

A FORMULATION OF THE CLASSICAL DEFINITION OF TRUTH

Summary

A definition of truth stating that a sentence is true if and only if the state of affairs (Sachverhalt) described by it exists is formulated in this paper by means of terms of contemporary formal logic.