Ks. STANISŁAW KAMIŃSKI

POCZĄTKI INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

W logice rozróżnia się zazwyczaj dwie zasadnicze grupy rozumowań: dedukcyjne i indukcyjne. Wśród ostatnich wymienia się indukcję niezupełną oraz zupełną, która może zachodzić albo przez proste wyliczenie *(per enumerationem simplicem)* albo przez rekurencję. W tym ostatnim przypadku mówimy, że jest to indukcja arytmetyczna albo matematyczna. Podstawę tego rodzaju wnioskowania stanowi zasada indukcji skończonej [1]. Można by ją przedstawić idąc za sformułowaniem Poincarégo (*Nauka i hipoteza*) w następujący sposób:

Jeżeli (liczba jeden spełnia funkcję zdaniową fx oraz jeśli każda liczba poprzedzająca k spełnia funkcję zdaniową fx, wtedy k spełnia tę funkcję), to każda liczba naturalna spełnia funkcję zdaniową fx. Schemat wnioskowania przez indukcję matematyczną przybiera przeto taką postać:

F(1)
jeżeli F(k), to F(k+1)
zatem: dla wszelkich naturalnych wartości zmiennej n sprawdza się formuła F(n).

A więc we wnioskowaniu zwanym indukcją matematyczną z dwu przesłanek, z których pierwsza stwierdza, iż pewna formuła F(n) zawierająca zmienną n sprawdza się dla n = 1, druga zaś stwierdza, iż jeśli formuła F(n) sprawdza się dla n = k naturalnego, to sprawdza się dla n = k + 1, wyprowadza się wniosek, iż

---

1 Uogólnieniem zasady indukcji skończonej jest występująca w teorii mnogości zasada indukcji pozaskończonej, w której argument funkcji zdaniowej fx przebiega nie tylko zbiór liczb naturalnych, lecz także każdy zbiór dobrze uporządkowany. Zob. K. Kuratowski i A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa—Wrocław 1952, 185 n.

formuła F(n) sprawdza się dla wszelkich naturalnych n.[2] Ten typ wnioskowania daje zawsze konkluzje prawdziwe, o ile prawdziwe są przesłanki; jest więc niezawodnym sposobem wnioskowania. Dzięki temu nadaje się na metodę dowodzenia uprawnioną w matematyce. Nie zawsze jednak posługigiwano się tam tym sposobem rozumowania. W powszechnym użyciu indukcja arytmetyczna występuje dopiero od XIX wieku. Jeśli zaś chodzi o jej początki, to sprawa nie wydaje się dostatecznie wyjaśniona. Najpierw uważano bowiem, że zasadę indukcji skończonej wynalazł Jakub Bernoulli (1654—1705) w publikacji umieszczonej w *Acta Eruditorum* z roku 1686 na str. 360—1. Potem jednak odkrycie tej zasady przypisywano B. Pascalowi (1623—62), który wprawdzie jej nie sformułował, ale posługiwał się nią w *Traitè du triangle arithmétique*, pochodzącym najpóźniej z roku 1654 a opublikowanym w r. 1665[3]. A wreszcie G. Vacca początki wyraźnego stosowania zasady indukcji matematycznej umieścił jeszcze wcześniej, i to o cały wiek. Ogłosił mianowicie wynalazcą zasady indukcji arytmetycznej włoskiego matematyka, opata z Messyny Francesco Maurolyco (1494—1575), który choć nie podał tej zasady, to jednak posługiwał się nią najwyraźniej i zupełnie świadomie[4]. Takie mniemanie przyjęło się dość powszechnie. Znaleziono też wcześniejsze ślady użycia choćby samej idei charakterystycznej dla indukcji matematycznej. Jako prekursorów Maurolyco,

---

[2] Ajdukiewicz K., *Zarys logiki*, Warszawa 1955, 170—1.

[3] Zob. *Oeuvres*, ed. L. Brunschvicg, Paris 1908, III, 456. Dowód w oparciu o zasadę indukcji znał też P. Fermat (1608—65). Pascal w listach do niego czynił wyraźne aluzje do tego rodzaju dowodów. Zob. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig 1892, 684; *Formulaire Mathematique* publié par G. Peano, ed compl. t. IV, Turin 1903, 35 i 323.

[4] Cyt. wyżej *Formulaire* oraz *Sur le principe d'induction Mathematique*, „Revue de Métaphysique et de Morale", XIX (1911) 30—3 i *Maurolycus, the first discoverer of the principle of Mathematical induction*, „Bulletin of the American Mathematical Society", XVI (1909—10) 70—3. Na pytanie, czy Pascal znał Maurolyco'a dowód, odpowiada Vacca twierdząco. Pascal w r. 1659 wyraźnie powoływał się na Maurolyco.

którzy prawdopodobnie korzystali w swych dowodach z myśli zawartej w zasadzie indukcji arytm. wymienia się, o ile mi wiadomo: Euklidesa, Theodora z Cyreny, indyjskiego matematyka z XII w. — Bhaskarę, Jana Campanusa i Lewi ben Gersona [5]. Czy jest to właściwy obraz początków indukcji matematycznej? Odkładam w tej chwili sprawę pełnego i dokładnego badania, czy Maurolyco oraz jego domniemani prekursorzy rzeczywiście znali indukcję matematyczną. Pozostaje jednak zagadnienie, czy Maurolyco niezależnie od kogokolwiek wpadł na pomysł tej metody, czy też był kontynuatorem autorów wcześniejszych, a jeśli tak, to jakich.

W celu rozwiązania tego problemu należałoby przebadać literaturę, z jakiej korzystał Maurolyco. Ponieważ zasada indukcji matematycznej używana była głównie w dowodach arytmetycznych [6] przeto wypada prześledzić dowody w arytmetykach okresu bezpośrednio poprzedzającego dzieło włoskiego opata, a także tych autorów — bez względu na czas ich działalności — od których mógł on być zależny.

Jeżeli chodzi o arytmetykę bezpośrednich poprzedników Maurolyco, to zakres poszukiwań ograniczyłem do drukowanych podręczników arytmetyki pierwszej połowy XVI w. Takie zwężenie nie powinno w zasadzie przeszkodzić w osiągnięciu zamierzonych rezultatów, bo na przełomie XV i XVI w. wydawano wszystkie znane i typowe podręczniki i to nie tylko ówczesnych matematyków lecz także i dawniejszych. W kilkudziesięciu podręcznikach arytmetyki typowych i znanych autorów w tym okresie, począwszy od Luca Paciuolo (Luca di Borgo San Sepolchro, 1445—1514) aż do Kaspra Peucera (1525—1602) nie

---

[5] W. H. Bussey, *The origin of Mathematical Induction*, „The Amer. Math. Monthly" XXIV (1917) 191—207; Fl. Cajori, *Origin of the name „Mathematical induction"*, „The Amer. Math. Monthly", XXV (1918), 197—201; Johannes Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik...* VI Analysis, 2 Aufl. Berlin—Leipzig 1924, 43—4.

[6] Współcześnie korzysta się z zasady indukcji skończonej w różnych dziedzinach matematyki; obok arytmetyki i w algebrze a nawet w geometrii.

znalazłem nic, co mogło by choć w części równać się ze świadczącym o stosowaniu indukcji dowodem w arytmetyce Maurolyco. Arytmetyki ówczesne w olbrzymiej większości miały charakter praktyczny. W czasach Odrodzenia gorliwie zajmowano się pogardzaną lub nie dość cenioną dawniej sztuką rachowania. Wydawano więc bardzo wiele podręczników, które zawierały zazwyczaj najniezbędniejsze określenia z dziedziny arytmetyki oraz wskazówki do przeprowadzania działań matematycznych ilustrując je przykładami i wdrażając do ich sprawnego wykonywania zadaniami. Ze znanych arytmetyków tylko nieliczni, jak np. pozostający pod wpływem Nikomacha — Boecjusza Paciuolo, Lefèvre (Jacobus Faber Stapulensis), Joannes Scheubelius (1494—1570), Peucer i częściowo niektórzy matematycy włoscy, nie tylko podają prawidła rachowania lecz także własności liczb figuralnych w postaci mniej lub więcej wyraźnie sformułowanych tez z dołączonymi ich uzasadnieniami. Ale i tu z wyjątkiem Lefèvre'a, o którym będzie jeszcze mowa — nie zauważyłem nic, z czego by skorzystał dla swej metody Maurolyco. Pozostaje więc szukać wzorów u „mistrzów" Maurolyco.

Arytmetyka opata włoskiego pt. *Arithmeticorum libri duo* napisana w r. 1557 wydana została po raz pierwszy w książce *D. Francisci Maurolyci Opuscula Mathematica*... Venetis 1575. Posiada wyraźnie charakter teoretyczny; ma na celu — jak jej autor zaznacza we wstępie — uzupełnienie materiału opuszczonego w dotychczasowych podręcznikach oraz udowodnienie w łatwiejszy sposób wielu twierdzeń. Przedstawiona jest w postaci numerowanych tez z dość dokładnie sformułowanymi dowodami, które uzupełniają niekiedy corollaria i scholia. Każdą część poprzedzają definicje. Nie trudno dopatrzyć się w tym naśladowania *Elementów* Euklidesa oraz posługiwania się metodą charakterystyczną dla scholastyków. O treściowych źródłach arytmetyki Maurolyco łatwo dowiedzieć się z jego wstępu. Z wcześniejszych arytmetyków wymienia tam Greków: Pitagorasa, Euklidesa, Nikomacha i Jamblicha, a z łacińskich — Boecjusza i Jordanusa. Biorąc pod uwagę to, że: 1⁰ co dał z arytmetyki twórca naukowej matematyki Pitagoras z Samos (ok. 580—500) znajduje się poprzez Platona u Theona ze Smyrny i Jamblicha 2⁰ Euklides i narosła wokół niego literatura komentarzy i uzupełnień były nieustannym tak pod względem treści jak i formy źródłem dla arytmetyków 3⁰ Maurolyco znał prawdopodobnie arytmetykę Theona [7] 4⁰ Boecjusz dał — jak sam mówi, a powtarza to Maurolyco — skrócony przekład Nikomacha, uzupełniony tym co było najciekawsze u innych autorów greckich 5⁰ arytmetyka Boecjusza była głównym źródłem dla średniowiecznych arytmetyków a zwłaszcza Jordanusa oraz 6⁰ dla Maurolyco szczególnie wartościowa i bliska jest arytmetyka Jordanusa, można przyjąć następujący wyraźny łańcuch zależności zasadniczej (nie tylko pośredniej ale i bezpośredniej): Euklides — Nikomach z Jamblichem i Theon — Boecjusz — Jordanus (i inni średniowieczni autorzy) — Maurolyco [8]. Ponieważ o śladach indukcji u Euklidesa historycy wspominają, pozostaje więc do zbadania, co mógł zaczerpnąć dla swej metody opat z Messyny z: 1⁰ Nikomacha z Jamblichem i Theona 2⁰ Boecjusza 3⁰ Jordana (i innych autorów średniowiecznych) oraz 4⁰ metody scholastycznej.

Najpierw dla umożliwienia porównań przytoczę najbardziej świadczący — zdaniem Vacca — o wyraźnym i świadomym posługiwaniu się indukcją matematyczną tekst 15 tezy u Maurolyco:

Ex aggregatione imparium numerorum ab unitate per ordinem successivem sumptorum, construuntur quadrati numeri continuati ab unitate, ipsisque, imparibus collaterales. Nam per antepraemissam, unitas imprimis cum impari sequente facit quadratum sequentem scilicet, 4. Et ipse 4. quadratus secundus, cum impari tertio scilicet 5. facit quadratum tertium scilicet

[7] Jak wynika bowiem z zamieszczonego na końcu jego *Matematyki* wykazu prac Maurolyco, ten ostatni przekłada Theona geometrię pt. *Data Geometrica* (przekład ten nie został wydany). Wolno przypuszczać, że przy swej erudycji znał również arytmetykę Theona.

[8] Nie wymienia się tu Diophanta z Aleksandrii (ok. połowy III w.), bo jego arytmetyka ma inny charakter.

9. Itemque 9. quadratus tertius cum impari quarto scilicet 7. facit quadratum quartum, scilicet 16. et sic deinceps in infinitum, semper 13a repetita propositum demonstratur [9].

Na przełomie I—II w. powstają dwie w układzie różne od euklidesowej podobne między sobą arytmetyki, które wywarły duży wpływ na późniejszych autorów. Nikomach z Gerazy, neopitagorejczyk żyjący ok. 100 r. napisał pierwszy oddzielny podręcznik arytmetyki *Wstęp do arytmetyki* [10]. Wprowadzenie do tej arytmetyki napisał neoplatończyk syryjski Jamblich (zm. ok. 330 r.) [11], a Boecjusz (480—524) dał jej łaciński przekład [12]. Theon ze Smyrny, matematyk neopitagorejski z początku II w., napisał arytmetykę we wstępie do matematycznych rozważań Platona [13]. Jest ona objętościowo mniejsza (32 krótkich rozdziałów) niż Nikomacha (I ks. 23 rozdz. i II ks. 29 rozdz.) i pozbawiona teoretycznych wstępów, które znajdują się u Nikomacha a zwłaszcza u Boecjusza. U Theona i Boecjusza występują znowu częściej niż u Nikomacha tabelki, przykłady i objaśnienia [14]. W tych arytmetykach występują dowody,

---

[9] *Arithmeticorum...*, s. 7.

[10] *Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri* II, rec. Ricardus Hoche, Leipzig 1866 (1 wyd. było w Paryżu w 1538 r.).

[11] *In nicomachi arithmeticam introductionem liber*, ed. H. Pistelli, Leipzig 1894. Obok tego Jamblich jest autorem dziesięciu ksiąg *Twierdzeń Pitagorejskich*.

[12] A. M. S. Boetii, *De Arithmetica* libri duo, ed. Migne, P. L. LXIII, 1079—1168. Pierwszy łaciński przekład *Arytmetyki* Nikomacha dokonany przez Apulejusza z Madaury, jak twierdzi Kasjodor, zaginął (zob. P. L. LXX, 1028).

[13] Wraz z przekładem łacińskim po raz pierwszy wydał go Bouilland (Paris 1644), a potem von de Gelder (Leiden 1827), Hiller (Leipzig 1878) i Dupuis (Paris 1892). Posługuję się tu wydaniem pierwszym, które w łacińskiej wersji nosi tytuł: *Theonis Smyrnaei Platonici eorum quae in Mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt exposiio... opus nunc primum editum, latina versione ac notis illustratum ab Ismaele Bullialdo.*

[14] Dokładne porównanie arytmetyk Nikomacha i Theona przeprowadzone jest w *Nicomachus of Gerasa Introduction to Arithmetic,* transl. M. D'Ooge, New-York (1926) 1938, 37—45.

które widoczniej niż u Euklidesa posiadają charakter indukcyjny. Zauważyć to można u Nikomacha w pierwszej księdze rozdz. 22 i 23 oraz w II ks. w rozdz. 12, 17, 18, 20 a zwłaszcza w 19, a odpowiednio u Jamblicha na str. 72—87 jego *Wprowadzenia*. Jeszcze wyraźniej sugerują korzystanie z indukcji dowody u Theona w rozdz.: 5, 15, 16 (kilka), 19 (kilka), 20, 25 i 28. Wśród tych ostatnich znajduje się też dowód tezy odpowiadającej 15 tezie u Maurolyco. Oto tekst w wersji łacińskiej:

Quadrati sunt, qui generantur additione imparium inter se continua serie expositorum, verbi gratia exponantur impares deinceps 1, 3, 5, 7, 9, 11. unum et 3 faciunt 4, qui numerus quadratus est, quippe qui sit aequaliter aequalis, hoc est bis duo, 4. Quatuor et 5 iuncta faciunt 9, qui numerus quoque quadratus est, dant enim ter tria 9. Novem et 7, simul exhibent 16, qui quadratus etiam est, quater enim quatuor colligunt 16. Sexdecim et 9 faciunt 25, estque hic pariter quadratus numerus, atque aequaliter aequalis, quinquies enim quinque dant 25. Eadem in infinitum procedit ratio [15].

Przytoczone postępowanie uzasadniające zdaje się nie mieć wyraźnego charakteru dowodu. Płynie to stąd, że Theon nie oddziela tez i ich dowodów, lecz w ciągłym tekście stawia twierdzenia i je uzasadnia. Z kontekstu jednak można poznać bez trudu, że pewne ustępy stanowią dowody w całym tego słowa znaczeniu. Niekiedy nawet autor sam mówi, że przeprowadza dowód jakiejś tezy. Dla poparcia tego przytoczę jeszcze tekst z rozdziału 20 odpowiadający częściowo 8 tezie ks. IX *Elementów* Euklidesa:

Sic autem ostendemus quod multiplicium numerorum ab unitate procedendo omnes alternatim sint quadrati, duobus vero intermissis mediis sint cubici, quinque vero omissis omnes sint quadratocubici; exponantur plures numeri in progressione dupla. Primus duplus est binarius, eum sequitur 4, qui quadratus est deinde 8, qui cubicus est: hunc 16,

---

[15] Rozdz. 15 (str. 41). To samo twierdzenie i podobnie uzasadniane jest w rozdziale 19 i 25.

quadratus, ab illo proximus est 32, post quem 64, quadrato cubus sequitur. Succedit huic 128, quem excipit 256, qui quadratus etiam est, similisque in infinitum datur progressus [16].

Chociaż ujęcie arytmetyki u Theona jest inne niż u Maurolyco, to jednak cytowane fragmenty greckiego matematyka niewiele różnią się od odpowiadających im tekstów opata z Messyny metodą posługiwania się indukcją w dowodzeniu. Nawet sam sposób wyrażania się u obu autorów jest bardzo podobny. A więc skoro przypisuje się Maurolico wyraźne stosowanie zasady indukcji matematycznej, to nie byłoby uzasadnionym odmiawiać Theonowi znajomości zasadniczej myśli tej zasady. Przeciw takiemu mniemaniu dałoby się wysunąć następujące zarzuty. Theon mógł traktować swoje postępowanie dowodowe, w którym my dopatrujemy się używania indukcji jako uzasadnianie przez przykład. Świadczyłoby o tym zaczynanie omawianych uzasadnień od słów *verbi gratia*. Natomiast Maurolyco wyraźnie przypisuje tego rodzaju dowodom swoisty charakter. Otóż niewątpliwie niekiedy sformułowania dowodów nie są u greckiego arytmetyka jasne, ale i Maurolyco nie zawsze unika takich nieporozumień. Często również zaczyna interesujące nas dowody od słów *Exempli gratia*... Atoli obaj w dalszym ciągu uzasadniania wyraźnie dają do zrozumienia, że nie chodzi im tylko o ilustrację przy pomocy przykładów, ale o dowodzenie ogólnego twierdzenia poprzez szczegółowe przypadki. Dlatego kończą powiedzeniem, że we wszystkich następnych przypadkach (*in sequentibus, et ita deinceps, in infinitum*) zachodzi to samo.

Istnieje inna trudność w przypisywaniu Theonowi posługiwania się zasadą indukcji. W zasadzie tej traktuje się jedynkę jako liczbę. Tymczasem dla matematyka greckiego (jak i dla wielu późniejszych) jedynka właściwie nie jest sama liczbą,

---

[16] Występujące w zakończeniu tego rodzaju dowodów łacińskie zwroty: *quae ratio in aliis usque in infinitum locum habet, quae in infinitum procedit methodus, eademque est in caeteris numeris ratio, in sequentibus porro res eodem se modo habet*, są tłumaczeniem greckiego zwrotu Theona: *kai mechris apeirou ho autos logos, względnie: ho de autos logos mechris apeirou*, lub: *ho de autos logos kai epi tes exes.*

lecz *principium (arche) numerorum* (rozdz. 4 i 9). Otóż praktycznie trudność ta jest tylko pozorna. Zarówno Theon jak i wszyscy jemu w tym podobni traktują w interesujących nas dowodach jedynkę jako liczbę. Świadczy o tym choćby taki zwrot u Theona: ...*unitas primus est quadratus numerus*... (właśnie w rozdziale 19).

Boecjusz w swej *Arytmetyce* nie podaje oddzielnie tez lecz w ciągłym tekście przypisuje pewnym liczbom tzw. właściwości, co stara się następnie udowodnić. Zdaje się zakładać przy tym dziedziczność pewnych właściwości w zbiorze liczb naturalnych. Daje się to zauważyć w rozdziałach: 10, 17, 23, 30 i 32 ks. I oraz w 3, 12, 13, 14, 15 i 16 ks. II. W pierwszym z przytoczonych miejsc stwierdza, że każda liczba w szeregu

2, 6, 10, 14, 18, 22...

podzielona przez 2 daje liczbę nieparzystą i uzasadnia to tym, iż liczby tego szeregu powstają z pomnożenia przez 2 liczb nieparzystych. Okazuje to na liczbach 1, 3 i 5 stwierdzając, że sprawdzi się to dla wszystkich liczb tego szeregu:

Namque hi si per binarium numerum multiplicentur, omnis pariter impares, rite pluralitas dimensa efficiet. Ponatur enim prima unitas, id est 1, et post hanc qui ab hac duobus differt, id est 3, et post hunc qui rursus a superiore duobus, id est 5, et hoc in infinitum.

Nie ma jednak u Boecjusza wyraźnie podkreślonego charakteru dowodowego tego postępowania. Można by nawet raczej nazwać je uzasadnianiem przez podanie przykładu czy przez analogię niż indukcyjnym.

Głównym i najbliższym źródłem dla Maurolyco był Jordanus Nemorarius (zm. 1237 r.) [17]. Napisał on w dziesięciu księgach arytmetykę, która wydrukowana była w Paryżu w latach 1496 i 1514 z uzupełnieniami Jakuba Lefèvre d'Étaples (1455 —

---

[17] Był obok Leonardo z Pizy najwybitniejszym matematykiem XIII wieku. Zwany też jest Nemoratius oraz — jeśli chodzi tu o tego samego dominikanina — Saxo, de Sachsen, Teutonicus. Por. Cantor, op. cit., 52 n.

1537). Posługuję się tym drugim wydaniem noszącym tytuł *Jordani Nemorarii clarissimi viri Elementa Aritmetica cum demonstrationibus Jacobi Fabri Stapulensis... Nova comentatio in Jordanum per Jacobum Fabrum Stapulensem laborata...* Dzieło to tak pod względem treści jak i formy zależne jest od *Arytmetyki* Boecjusza, która zawarta jest tu głównie w VII, VIII i IX księdze. Zmiany poszły w kierunku wyraźniejszego oddzielenia i poklasyfikowania (z numeracją) tez oraz bardziej dokładnego przeprowadzenia dowodów. Niewątpliwie znać w tym wyraźny wpływ *Elementów* Euklidesa i metody scholastycznej. Był też Jordan pod wpływem matematyków greckich [18]. Arytmetyka Jordana-Fabra swoją treścią i układem bliska jest Arytmetyce Maurolico. Czytając dowody tez: 6 i 19 księgi IV; 17 ks. V; 24, 28 i 29 ks. VI; 19, 26, 27, 28 i 52 ks. VII; 1, 10, 11, 12, 19, 20, 27 i 28 ks. VIII; 32, 37, 40, 43, 44, 47, 52 i 70 ks. IX oraz 12 i 50 ks. X nie można znaleźć istotnej różnicy między posługiwaniem się przez nich indukcją a dowodami indukcyjnymi Opata z Messyny. Może tu co najwyżej zachodzić pewne udoskonalenie formy przedstawiania argumentacji. Oto dla porównania odpowiadająca przytoczonej wyżej 15 tezie u Maurolyco 26 teza z ks. VII i jej dowód:

Si ab unitate impares coacerventur; qui proveniet erit quadratus. Sit unitas et suo ordine consequentes impares: a b c... dico unitatem et a constituere quadratum. Item unitatem a et b constituere quadratum; et unitatem a b et c; et ita consequenter quotquot similiter aggregaveris.

Litery a b c... podobnie jak u Euklidesa duże litery greckie są symbolami liczb nieparzystych (w tym przypadku), następujących kolejno po jedynce. Na marginesie dowodu znajdują się też u Jordana szeregi cyfr nieparzystych i odpowiednio kwadratów, stanowiących sumy tamtych. Takież zapisy, ale tylko cyframi występują u Maurolyco.

---

[18] Theon np. cytowany jest w *Arytmetyce* Jordana i musiał często występować w matematyce XIII wieku, skoro J. Blancanus (zm. 1624) w swej Historii matematyki uważa Jordana i Theona za współczesnych sobie. Por. Cantor, op. cit., 599.

Inny przykład (29 teza ks. VI odpowiadająca częściowo 9 tezie ks. IX *Elementów* Euklidesa):

Si numerorum ab unitate continue proportionalium secundus ab unitate fuerit quadratus, omnes erunt quadrati... ...nam per praemissam etiam tertius erit quadratus et quod secundus est quadratus per decimam huius (brzmi ona: *Trium numerorum continue proportionalium si primus fuerit quadratus tertium quoque quadratum esse necesse est* — odpowiada to 22 tezie VIII ks. *Elementów*) *tertius ab illo qui est quartus etiam est quadratus; et per praemissam quod tertius est quadratus uno intermisso quintus est quadratus, et ita deinceps quare numerorum ab unitate continue proportionalium si secundus est quadratus omnes erunt quadrati.*

A oto przykłady typowych zakończeń tez, odnoszących się również do szeregu liczb naturalnych:

...et hac ratione de sequentibus molire id quod propositum est ostendere; et omnino constabit propositum (10 teza ks. VIII).

...sicque per precedentem. semper concludes propositum (20 teza ks. VIII).

...Et ita de quibuslibet consequenter, quod est propositum (40 teza ks. IX).

...sicque consequenter secundum crementum numerorum infinitum; quod est propositum (52 teza ks. IX).

Faber, a także uczeń jego Jodoc Clichtovaeus (1473—1543), posługuje się również tym sposobem dowodzenia i w innych dziełach. W komentarzu do *Arytmetyki* Boecjusza zatytułowanym: *Jacobi Fabri Stapulensis Epitome in duobus libris Arithmeticis divi S. Boetti... Judoci Clichtovei Neoportuensis in Epitomen Arithmeticam Jocobi Fabri Stapulensis commentarius...* Venetiis 1510, tak uzasadnia ową tezę o kwadratach powstałych z sumy liczb nieparzystych (fol. 20):

...ordinatis numerali serie imparibus hoc modo 1, 3, 5, 7, 9 connumerata quidem unitate quod primus est quadratus et cuiuslibet harum aggregationum principium colligant simul 1, 3

nascit secundus tetragonus scilicet 4. Deinde aggregentur 1, 3, 5 fit terius quadratus utpote 9. ...Et ita quantumlibet procedendo.

Ostatnim wreszcie źródłem metody Maurolyco jest logika scholatyczna. Wobec tego, że Maurolyco korzystał z metody scholastycznej i że matematycy nierzadko bywali jednocześnie logikami (właśnie Lewi ben Gerson, Faber, Jodoc) dopatrywanie się tego rodzaju zależności nie jest bez racji. Logika średniowieczna pozostająca pod zasadniczym wpływem logiki Arystotelesa uważała za uprawnione w nauce tylko dowodzenia sylogistyczne oraz na podstawie indukcji zupełnej *per simplicem enumerationem.* Odnośnie tego ostatniego sposobu dowodzenia niektórzy komentatorzy dopuszczali jako naukowe dowodzenie indukcyjne takie, w którym bądź faktycznie wylicza się wszystkie przypadki (*inductio formaliter completa*) bądź po wyliczeniu kilku przypadków dodaje się zwrot *et sic de aliis* na oznaczenie, że umysł nie znajduje racji do zaistnienia przypadków przeciwnych (*inductio virtualiter completa*) [19]. Otóż wydaje się, że ten ostatni rodzaj indukcji był wzorem a może i prototypem metody indukcyjnej występującej u Maurolyco i jego średniowiecznych poprzedników. To między innymi tłumaczyłoby fakt, dlaczego indukcja wystąpiła tylko u arytmetyków XIII—XVI w. posługujących się metodą scholastyczną. Nie należy też zapominać, że zastosowanie indukcji w dowodach arytmetycznych w XVI w. jest rzadkie, jak rzadkim było w matematyce używanie metody scholastycznej.

O ile wskazane przeze mnie ostatnie źródło metody Maurolyco miałoby większe znaczenie, to powstałyby uzasadnione wątpliwości, czy Maurolyco posługiwał się świadomie i wyraźnie indukcją matematyczną. Wątpliwości te niezależnie od tego rodzą się przy dokładniejszej analizie przytoczonych wyżej przykładów rzekomego opierania się na zasadzie indukcji matematycznej. Ale o tym przy innej okazji.

---

[19] Por np, Petri Tartareti, *In Aristotelis Ligicam...* tr. V, początek oraz Duns Scott, *Opus oxoniense,* lib. I, dist. 3, q. IV, 15.

Les règles de l'interprétation juridique n'étant pas règles logiques de raisonnement, l'interprétation juridique ne mérite pas le nom de logique juridique au sens propre du mot. Néanmoins cette dénomination peut être employée pour la désignér au sens métonimique, à la base de l'analogie d'attribution qui nous authorise à attribuer le nom propre de l'effet à la cause ou celui du moyen à la fin et vice versa (p. ex. on appelle l'air sain parce qu'il rend l'homme sain).

L'interprétation juridique peut donc être appelée logique juridique seulement au sens analogique, c'est- à- dire dans la mesure ou ses règles imposent l'emploi de règles logiques de raisonnement, surtout de celles qui sont basées sur les thèses de la logiques des propositions normatives.

S. KAMIŃSKI

THE ORIGIN OF MATHEMATICAL INDUCTION

It is commonly thought that the first to have made definite and purposive use of the principle of arithmetic induction was the Italian Francesco Maurolico (1494—1575). Historians of mathematics of proofs where this principle may possibly have been made use of Euclides, John Campanus (XIIIc), Levi ben Gerson (XIVc.).

The author's investigations and research ave led him to accept the following conclusions:

(1) Maurolico's method of proofs which has been interpreted as an application of the principle of mathematical induction, is both a continuation of the scholastic tradition, and of that of the earles arithmeticians. In this respect, he is the immediate succesor of Jordan Nemorarius (d. 1237) and of his commentator Jacob Faber Stapulensis (d. 1537) and undirectly — of Boethius, Nicomachus of Geraza, Theon of Smyrna and Euclides.

(2) Essentially, the use made by Maurolico of Mathematical induction, is not any clearer in his work than in that of Jordan (ed. and trad. Fabre), not even in that of Theon of Smyrna.

(3) It would seem that the relevant proofs of Maurolico and his predecessors are based not on *mathematic* but on *empiric* induction.

A. KORCIK

LES LOIS PRINCIPALES DU RAISONNEMENT ET LES RELATIONS ENTRE ELLES

Le présent travail est une étude historique et critique sur les lois principales du raisonnement (principes de contradiction et du milieu exclu,