

O ILOŚCIOWYM CHARAKTERZE PRZEDMIOTU MATEMATYKI

Sprawa determinacji przedmiotu matematyki należy do tzw. filozofii matematyki. Rozwiązania proponowane w tej dziedzinie rzadko jednak bywają ogólnie przyjmowane. Może do tej kontrowersyjności przyczynia się również trudność właściwego połączenia fachu matematyka i filozofa. Wbrew pozorom nie zdaje się bowiem gwarantować tu trafności i poprawności sformułowanych poglądów uprawianie, choćby twórcze, tylko jednej z tych dyscyplin. W każdym razie skrajność stanowisk zajmowanych w filozofii matematyki zdarza się często. Wiąże się to prawdopodobnie także z dość gwałtownymi przemianami w sposobie uprawiania samej matematyki¹ oraz zwyczajem upraszczania też².

Powyższy stan rzeczy nie pozwala rozwiązywać zagadnień z filozofii matematyki bez uprzedniego ustalenia jej metodologicznego charakteru (zarówno od strony genetycznej, jak i strukturalnej) oraz wskazania zakładanych w niej uwarunkowań filozoficzno-epistemologicznych. To zaś wymaga dość obszernych wywodów. Poniższe uwagi, zmierzające do znalezienia odpowiedzi na pytanie, czy przedmiot matematyki posiada charakter ilościowy, będą miały postać jedynie dociekania wstępnego, dyskusyjnego. W piśmiennictwie polskim pojawiło się bowiem kilka wypowiedzi, które — jeśli nie budzą zastrzeżeń, to mogą stanowić okazję do kontrowersji³.

Najpierw sprawa sposobu charakteryzowania matematyki. Na pewno „przedmiotowe” ujęcie nie jest dla określenia matematyki jedynym możliwym determinowaniem unifikującym. Zamiast wskazywać jej przedmiot, można np. określić zespół typowej dla niej problematyki lub wskazać obszar jej badań, czy wreszcie jej metodę. Nie da się jednak utrzymać w całej rozciągłości twierdzenia, że „dziś ucieka się raczej od ujmowania matematyki jako całości z punktu widzenia jej przedmiotu”⁴. W czasach nowożytnych matematycy, a zwłaszcza zajmujący się tylko poszczególnymi dyscyplinami matematycznymi, nie mieli zwyczaju dociekać, co jest przedmiotem matematyki w ogóle. Wielotorowość jej rozwoju, jej niejednorodność oraz daleko posunięta specjalizacja nie sprzyjały takim ujęciom. Urok metody dedukcyjnej zaś sprawił, że często poznanie matematyczne determinowano jedynie

¹ Nie wolno zapominać, że obok wielokierunkowego rozwoju matematyki występują rozmaite próby jej unifikującej systematyzacji.

² S. F. Barker np. we wstępie do swej *Philosophy of Mathematics* (N. Y. 1964) uważa za stosowne najpierw przestrzec czytelnika przed niektórymi obiegowymi twierdzeniami, które są uproszczeniami.

³ M. A. Krąpiec, *Struktura bytu*, Lublin 1963, s. 198—200 i 202—204; D. Gierulanka, *Zagadnienie swoistości poznania matematycznego*, Warszawa 1962, s. 153—187 oraz M. Lubański, *Ilość a matematyka*, „Roczniki Filozoficzne”, 12 (1964), z. 3, s. 87—91.

⁴ D. Gierulanka, op. cit., s. 156.

przy pomocy tej metody. Ostatnio jednak coraz jaśniej dostrzega się niewystarczalność determinacji matematyki tylko za pomocą metody dedukcyjnej. Nierzadko pojawiają się tendencje do szukania unifikacji dziedzin matematycznych w drodze zwiększenia ich abstrakcyjności, odkrycia najogólniejszych pojęć (i odpowiadających im struktur). Sprzyja temu i okazuje to właściwe wykorzystanie metody dedukcyjnej (użycza ona sposobów budowania pojęć), teorii mnogości (dostarczającej najbardziej ogólnych pojęć) i algebry abstrakcyjnej (która daje liczne zastosowania opracowanych własności działań). Wzajemne łączenie się i przenikanie dziedzin matematycznych (np. analizy i topologii) wiąże się właśnie ze zdobywaniem bardzo abstrakcyjnych pojęć (aspektów) i wspólnych metod. A wreszcie nie jest pozbawione typowości określanie matematyki i poszczególnych dyscyplin przez wskazanie ich tzw. dziedziny⁵.

Jeśli chodzi o filozofów matematyki, to omawiana sprawa przedstawia się bardzo zróżnicowanie. Epistemologiczna koncepcja matematyki pociąga za sobą takie lub inne stanowisko co do jej przedmiotu. Neopozytywiści (nominalizm i formalizm) nie uważają, żeby dyscypliny formalne miały w ogóle jakikolwiek swój przedmiot. Stanowią one układy bezprzedmiotowych i beztreściowych tautologii, które służą naukom empirycznym jako zdania pomocnicze (Wittgenstein, Carnap). Natomiast skrajni realiści epistemologiczni radykalnie „uprzedmiotowiają” matematykę. Obiektem jej mają być bądź byty idealne (tak np. Bolzano, Husserl), bądź różnego rodzaju konstrukcje myślowe i ich relacje (np. według Brouwera). Trzecia grupa, realiści umiarkowani (np. zwolennicy filozofii marksistowskiej), starając się zachować potoczny realizm poznawczy, nie widzą żadnej zasadniczej różnicy w typie przedmiotów nauk realnych i formalnych. Te drugie dotyczą tej samej rzeczywistości co i pierwsze, tylko ujmują ją w bardzo ogólnym i swoistym aspekcie⁶.

Trudno powiedzieć, żeby skrajni formaliści byli najbardziej liczni wśród przedstawicieli najnowszej filozofii matematyki.

Osobno warto podkreślić również i to, że inna jest sprawa, czy dziś determinuje się matematykę raczej przez wskazanie jej przedmiotu, a inna — czy punktem wyjścia w budowaniu teorii matematycznej bywa najpierw dany jej przedmiot. Matematycy, którzy uważają np., iż dopiero układ aksjomatów wyznacza przedmiot teorii matematycznej, przez to samo jeszcze nie przeczą temu, że „przedmiotowe” określenie już skonstruowanej teorii jest możliwe. Podobnie ten, kto uważa, że matematyka zajmuje się nie przedmiotami-rzeczami, ale niesamodzielnymi aspektami czy momentami (np. w pewien sposób pojętymi zbiorami), nie twierdzi tym samym, że nie da się jej ująć przedmiotowo, tzn. zdeterminować dostatecznie przez wskazanie jej przedmiotu⁷.

Przejdźmy teraz do głównego problemu, czy przedmiotem współczesnych dyscyplin matematycznych jest „czysta ilość”, czy też „wykraczają one poza ramy kategorii ilości”. Pierwsza supozycja jest tradycyjna. Wywodzi się z poglądu, iż *quantitas discreta* (mówiąc bardziej ogólnie i nowocześnie —

⁵ Por. A. Grzegorzczak, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1961, s. 9.

⁶ Istnieje wiele odmian tych głównych stanowisk. Np. formalista, H. B. Curry zdaje się umieszczać przedmiot matematyki w dziedzinie pośredniej między tą, którą wskazują formalisci oraz skrajni realiści. Natomiast pogląd, że przedmiotem matematyki jest byt intencjonalny, mieści się chyba między drugim a trzecim stanowiskiem głównym.

⁷ Por. D. Gierulanka, op. cit., s. 157—159.

mnożość, wyrażając się zaś tradycyjnie i ciałniej — liczbą) lub *quantitas continua* (analogicznie: przestrzeń, figura geometryczna) stanowi obiekt poznania matematycznego. Za drugą ma przemawiać to, że współczesna matematyka „operuje przecież pojęciami nieilościowymi także oraz bada przedmioty, o których charakterze ilościowym trudno jest orzec”. Zakładając mianowicie, iż przedmiotem badań matematycznych jest zbiór, funkcja, monoid itd., da się okazać, że wymienione przykładowo „byty” nie posiadają charakteru ilościowego⁸.

Niewątpliwie powiedzenie, iż przedmiotem współczesnej matematyki jest *quantitas*, wymaga dopełniającej eksplikacji. Z ilością jako własnością absolutną wiąże się bowiem kwantytatywne własności względne, stosunki ilościowe⁹. i rzeczywiście ogólnie pojęte relacje kwantytatywne stały się dziś w większym stopniu przedmiotem matematycznych teorii niż sama ilość (liczba). Krąg stosunków ilościowych (i szczególnej ich postaci — form przestrzennych) badanych przez matematykę ogromnie się rozszerzył. Ale wszystko to mieści się w kategorii ilości (jako mnogości, zbiorze). Zresztą od strony formalnej wykazano, że zbiór (klasa) oraz relacja są wzajem sprowadzalne (definiowalne)¹⁰.

Okazywanie zatem, że takie pojęcia, jak funkcja, monoid, zbiór częściowo uporządkowany, nie mają charakteru ilościowego, jest co najmniej nieporozumieniem (płynącym z nieprecyzyjnego posługiwania się terminami). Nie determinując uprzednio w żaden sposób sensu terminów: jakościowy, ilościowy, trudno rozstrzygać o jakościowym lub ilościowym charakterze zbioru czy relacji. Tym bardziej, jeśli nadaje się temu drugiemu terminowi znaczenie zawężone w stosunku do obiegowego¹¹. Trzeba bowiem bardzo ciasno rozumieć wyraz ilość, żeby twierdzić, iż np. zbiór nie ma charakteru ilościowego, gdy użyty jest w formalnej teorii matematycznej.

Ponadto, jeśli określi się funkcję jako „fakt przyporządkowania elementom jednego zbioru elementów drugiego zbioru”, to chyba przy psychologizacyjnej interpretacji, że funkcja jest faktem psychicznym (operacją myślową przyporządkowania) da się powiedzieć, iż pojęcie funkcji jest pojęciem „nieilościowym”. Skoro zaś desygnatem terminu funkcja jest stosunek ilościowy (relacja jednoznaczna), to również pojęcie funkcji posiada charakter ilościowy. Podobnie ma się rzecz z pojęciem monoidu. Zachodzi podejrzenie, że krytykowany tu Autor widzi źródło nieilościowego charakteru pojęć matematyki w ich redukowalności do pewnych pojęć logicznych. Byłoby to niesłuszne o tyle, że te ostatnie pojęcia mają wyłącznie zakresowy charakter.

Zresztą, jak można rozumieć termin oznaczający relacje między elementami zbioru albo własność zbioru, żeby powiedzieć, iż nie jest tu istotna „strona ilościowa” oraz że trudno jest tutaj dopatrzeć się charakteru ilościowego? Może w wypowiedzi: widzimy wyraźnie „nieilościowy” charakter pojęcia zbioru częściowo uporządkowanego, chodzi o to, iż w definicji zbioru częściowo uporządkowanego brak słów: liczba, ilość? A może intencją Autora było tu jedynie zasygnalizowanie tego, że w ilościowej relacji zachodzą również jakościowe stosunki oraz dające się ująć kwalitatywnie stany?

⁸ M. Lubański, l. c., s. 87.

⁹ Mówi o tym M. A. Krapiec, op. cit., s. 199.

¹⁰ Zob. C. Kuratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, „Fund. Math.”, 2 (1921) 161—171 oraz W. V. Quine, *On Relations as Coextensive with Classes*, „Journal of Symbolic Logic”, 11 (1946) 71 n.

¹¹ Tak zaś zdaje się postępować M. Lubański, l. c., s. 88.

W pierwszym przypadku zachodziłoby nieporozumienie co do charakteru języka matematyki, a w drugim — co do determinacji jej przedmiotu formalnego. Możliwe jest bowiem wysłowienie pewnych twierdzeń matematycznych przy pomocy zwrotów nie zawierających słów: ilość i liczba, ale posiadających mimo to znaczenie „kwantytatywne” i przez nie dotyczących ilościowych aspektów (struktury).

Druga ewentualność zapoznaje ważne, choć tradycyjne, rozróżnienie w poznaniu jego przedmiotu materialnego i formalnego. Matematyka dotyczy, ontycznie się wyrażając, czegoś, co — jako przedmiot materialny — posiada obok aspektów kwantytatywnych również kwalitatywne. Atoli przedmiotem formalnym (właściwym kątem patrzenia na przedmiot materialny) matematyki są właśnie jedynie aspekty zakresowe, czyli ilościowe. Stąd „dla bytów ilościowych znamy wiele twierdzeń typu nieilościowego”¹², ale te twierdzenia jako takie nie należą już do matematyki jako dyscypliny formalnej. W niej bowiem własności zbiorów ujmowane są tylko poprzez elementy zbiorów i zachodzące między nimi stosunki kwantytatywne. Relacje ilościowe charakteryzuje w przeciwieństwie do jakościowych właśnie ich obojętny stosunek do natury łączonych elementów (ich treściowego uposażenia). A przecież współczesna matematyka podkreśla jak najmocniej, że abstrahuje od natury elementów, wymagając jedynie, aby spełniały one relacje formalne zdeterminowane przez układ założeń teorii (aksjomatów i wstępnych definicji)¹³.

Przy takich ustaleniach bardzo dziwnie brzmi wypowiedź, że wprowadzić tzw. twierdzenie Jordana odnosi się do kategorii ilości, ale „samo w sobie jest ono czysto jakościowe. Nie ma ono charakteru ilościowego, mierzalnego”¹⁴. Dlaczego „twierdzenia matematyki, choćby orzekały coś o ilości, nie muszą nosić charakteru mierzalnego, ilościowego?” Czy znaczy to, że mogą być także interpretowane jakościowo? Jeśli tak, to postępuje się w ten sposób już nie w matematyce czystej (dyscyplinie formalnej), lecz w jej aplikacjach empirycznych. Terminy: zbiór, mnogość, relacja, tak jak występują we współczesnej matematyce, oznaczają ilościowe aspekty (momenty) czegoś. Mogą być jednak interpretowane kwalitatywnie w pewnych formułach, gdy przyporządkuje się im odpowiednio „jakości” spełniające formalne warunki wyrażone w wyraźnych lub uwikłanych definicjach tych terminów.

Dla teorii matematycznych znajduje się modele nieilościowe. Byty stanowiące takie modele nie muszą posiadać cech ilości, ale od tej „strony”, w tym aspekcie nie są tzw. dziedziną żadnej teorii matematycznej. Badane przez matematykę stosunki zawsze są bowiem stosunkami ilościowymi. Skoro jednak w jakiejś dziedzinie matematyki obok stosunków ilościowych, które uzyskały już ujęcie standardowe i zostały podporządkowane określonym regułom rachunkowym, zachodzi potrzeba wprowadzenia do rozważań zupełnie nowych stron badanych przedmiotów, to czasem mówi się, iż przechodzi się od rozważań ilościowych do jakościowych. Tak np. w teorii równań różniczkowych do dziedziny metod jakościowych należą metody badania globalnego zachowania się krzywych całkowych, nie wymagające efektywnego całkowania samych równań różniczkowych, lecz oparte na ogólnych rozważaniach topologicznych. Jednakże same te metody topologiczne w ich pełnym rozwoju

¹² Tamże, s. 90.

¹³ Por. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1962, początkowe zdania wstępu.

¹⁴ M. Lubąński, l. c., s. 89.

podlegają określonej algorytmowi sprowadzającemu zagadnienie do obliczania pewnych charakterystyk liczbowych (stopień odwzorowania itp.), co już wyraźnie wskazuje na ilościowy charakter tych nowych stosunków¹⁵. Jakościowa przeto może być co najwyżej geneza pojęć lub metod matematycznych oraz pozamatematyczna interpretacja teorii matematycznych. Tak przynajmniej przedstawia się sprawa przy obiegowym, intuicyjnym rozumieniu terminów: ilość i jakość.

¹⁵ Por. A. N. Kołmogorow, *O matematyce*, Warszawa 1955, s. 72.