ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXXVII-XXXVIII, zeszyt 1 – 1989-1990

LUDWIK BORKOWSKI

UZUPEŁNIAJĄCE UWAGI DO MEGO ARTYKUŁU *DOWÓD RÓWNOWAŻNOŚCI DWÓCH SFORMUŁOWAŃ KLASYCZNEJ DEFINICJI PRAWDY**

Mgr A. Biłat sformułował następujący zarzut skierowany przeciwko formalnej interpretacji pojęcia stanu rzeczy podanej w wymienionym artykule: Przy tej interpretacji stany rzeczy opisywane przez dwa zdania fałszywe są identyczne, gdyż każdy z nich — jako nie istniejący — jest równy zbiorowi pustemu. W konsekwencji stany rzeczy opisywane przez negacje tych zdań, będące zdaniami prawdziwymi, są również identyczne. Zarzut ten nie jest skierowany przeciwko twierdzeniom i dowodom podanym w artykule, ale przeciw stosowaniu pojęć wprowadzonych w artykule do odpowiednich przykładów. Umożliwia to znalezienie takiej modyfikacji określenia stanu rzeczy wprowadzonego w artykule, do której ten zarzut już się nie odnosi, przy zachowaniu całości wywodów zawartych w wymienionym artykule. Zanim przystąpię do przedstawienia tej modyfikacji, chciałbym oświetlić źródło, na gruncie którego wymieniona trudność mogła powstać.

Na temat pojęcia stanu rzeczy R. Ingarden pisze: "Przez kogo ten termin (po niemiecku *Sachverhalt*) został wprowadzony, nie potrafię powiedzieć. W każdym razie od czasu badań przeprowadzonych przez fenomenologów — Husserla, Reinacha, Pfändera — zyskał sobie prawo obywatelstwa w języku filozoficznym."[1]

Analizy dotyczące stanów rzeczy, których istnienie zdania stwierdzają, lub — jak krótko powiemy — które są opisywane przez zdania, wyrażano w językach naturalnych. W językach takich można bez trudności tworzyć nazwy stanów rzeczy opisywanych przez dane zdania. Dotyczy to nie tylko języka niemieckiego, który cechuje się dużą łatwością w tworzeniu złożonych wyrażeń

* *Dowód równoważności dwóch sformułowań klasycznej definicji prawdy.* "Roczniki Filozoficzne" 35: 1987 z. 1.

[1] R. I n g a r d e n. *O dziele literackim*. Warszawa 1960 s. 178.

rzeczownikowych, ale też w mniejszym lub większym stopniu innych języków naturalnych. W obu moich artykułach podaję przykłady takich nazw. Oto kilka z nich. Bycie większym liczby 3 od liczby 2 jest stanem rzeczy, którego istnienie stwierdza zdanie "$3 > 2$"; przynależność liczby 2 do zbioru liczb naturalnych jest stanem rzeczy, którego istnienie stwierdza zdanie "2 jest liczbą naturalną"; przynależność tego stołu do klasy przedmiotów białych jest stanem rzeczy, którego istnienie stwierdza zdanie "Ten stół jest biały"; bycie większym liczby 3 od liczby 2 i bycie większym liczby 2 od liczby 1 jest stanem rzeczy, którego istnienie stwierdza zdanie "$3 > 2$ i $2 > 1$". Nazwa tego ostatniego stanu rzeczy jest nazwą złożoną utworzoną z dwu nazw stanów rzeczy za pomocą słówka "i", które występuje tutaj jako funktor nazwotwórczy od dwóch argumentów nazwowych, będących nazwami stanów rzeczy. Takie złożone nazwy stanów rzeczy można też tworzyć za pomocą analogicznie rozumianego słówka "lub". W języku polskim nazwę stanu rzeczy opisywanego przez dowolne (atomiczne lub złożone) zdanie ϕ można też tworzyć za pomocą wyrażenia "to, że ϕ"; np.: to, że $3 > 2$, jest stanem rzeczy, którego istnienie stwierdza zdanie "$3 > 2$". Husserl w *Logische Untersuchungen* używa dla takich nazw stanów rzeczy w języku niemieckim wyrażenia "*dies, dass* ϕ".

Na podstawie tych przykładów jest widoczne, że mówienie w języku naturalnym o stanie rzeczy, którego istnienie dane zdanie stwierdza, jest całkowicie zrozumiałe i uzasadnione, skoro dla każdego zdania potrafimy utworzyć nazwę stanu rzeczy, którego istnienie to zdanie stwierdza.

W artykule wymienionym w tytule podjąłem się zadania zinterpretowania pojęcia stanu rzeczy opisywanego przez dane zdanie i jego istnienia za pomocą pojęć współczesnej logiki formalnej. Zgodnie z ujęciem stosowanym w logice współczesnej przy określaniu pojęcia spełniania i prawdziwości nie ograniczam się tylko do zdań, ale biorę pod uwagę dowolne wyrażenia zdaniowe (tj. zdania lub formy zdaniowe). Uwzględniam przy tym relatywizację podanego określenia do modelu M, który równa się parze uporządkowanej złożonej z jakiegoś niepustego zbioru i funkcji interpretującej f, określonej na zbiorze stałych pozalogicznych danego języka. Biorę też pod uwagę funkcję wartościującą h, określoną na zbiorze zmiennych danego języka; umożliwia to stosowanie wprowadzanych pojęć do form zdaniowych, a więc wyrażeń zdaniowych zawierających zmienne wolne. Z tych względów mówię o stanie rzeczy opisywanym przez dane wyrażenie zdaniowe w modelu M przy wartościowaniu h.

W związku z uwzględnieniem w proponowanym określeniu modelu M, a więc i pewnej dziedziny przedmiotowej, chciałbym zwrócić uwagę na następującą interesującą zbieżność. R. Ingarden podaje następujące określenie: "Sąd S jest prawdziwy, jeżeli stan rzeczy wyznaczony przez jego treść zachodzi niezależnie od istnienia sądu S w obrębie tej dziedziny bytu, w której dany sąd go umieszcza".[2]

W myśl określenia podanego w definicji D9.1 stanem rzeczy opisywanym przez wyrażenie atomiczne w modelu M przy wartościowaniu h jest relacja przyporządkowana predykatowi tego wyrażenia atomicznego przez funkcję interpretującą f lub funkcję wartościującą h, ograniczona do ciągu przedmiotów przyporządkowanych przez f lub h ciągowi argumentów tego predykatu. Stany rzeczy opisywane przez wyrażenia złożone tworzone z wyrażeń atomicznych za pomocą funktorów rachunku zdań i kwantyfikatorów są również relacjami ograniczonymi do ciągów odpowiednich przedmiotów.

Istnienie stanu rzeczy interpretujemy jako niepustość odpowiedniej relacji, zaś jej nieistnienie jako jej pustość.

Przyjmując taką interpretację stanu rzeczy opisywanego przez dane wyrażenie zdaniowe oraz jego istnienia lub nieistnienia dochodzimy do rozbieżności między ujęciem koncepcji stanów rzeczy w języku naturalnym a ujęciem tej koncepcji przy użyciu zaproponowanych odpowiedników, zaczerpniętych ze współczesnej logiki formalnej. Rozbieżność tę ujawnia zarzut przedstawiony na początku tego artykułu.

Źródłem tej rozbieżności jest fakt, że w języku teorii mnogości, w którym mówi się o klasach (zbiorach) i relacjach, denotacja dwóch nazw pustych jest identyczna. Nie jest tak jednak w języku naturalnym. Na gruncie języka naturalnego nie uznajemy, że dla dowolnych nazw pustych a i b, prawdziwe jest zawsze zdanie o postaci: $a = b$. Nie uważamy np. za prawdziwe zdań takich jak: Obecny król Polski jest tym samym, co obecny król Francji. Rusałka to to samo, co złota góra. Przynależność liczby -2 do zbioru liczb naturalnych to to samo, co przynależność liczby -4 do zbioru liczb naturalnych. Bycie mniejszym liczby 3 od liczby 2 to to samo, co bycie mniejszym liczby 4 od liczby 1. Itp.

Na marginesie można zauważyć, że trochę analogicznie, jak w języku naturalnym przedstawia się w tym względzie sprawa w ontologii Leśniewskiego. Jeśli nazwy a, b są puste, tj. tezami są wyrażenia: $\sim\underset{A}{\exists} A\varepsilon a$, $\sim\underset{A}{\exists} A\varepsilon b$, to można wprawdzie udowodnić, że: $a \doteq b$, co można odczytać: każde i tylko a jest b (a więc dwie nazwy puste są równozakresowe), ale fałszywa jest równość: $a = b$, która jest równoważna koniunkcji: $a\varepsilon b \wedge b\varepsilon a$, gdyż oba człony tej koniunkcji są wtedy fałszywe.

Jak wiadomo od denotacji (zakresu) nazwy odróżnia się jej konotację (treść). Sądzę, że w języku naturalnym warunkiem uznania prawdziwości zdania o postaci: $a = b$ jest stwierdzenie równości konotacji nazw a, b. Dlatego też

[2] A n t o n i B. S t ę p i e ń. *Wstęp do filozofii*. Lublin 1976 s. 115.

nie uznajemy prawdziwości zdań, których przykłady zostały podane powyżej, gdyż w tych zdaniach konotacje członów równości są różne. (Warto tu wspomnieć, że C. I. Lewis w swej pracy z historii logiki zauważa, że Leibnizowi przyświecała koncepcja treściowej, a nie zakresowej logiki nazw, i że to stało się źródłem jego trudności w tej dziedzinie. Sądzę, że dziś zbudowanie takiej logiki jest możliwe.) Z powyższego odróżnienia skorzystamy poszukując modyfikacji, o której była mowa na początku artykułu. A więc będziemy dążyli do określenia odpowiednika konotacji wyrażenia oznaczającego stan rzeczy. Konotacja nazwy jest pewną treścią charakterystyczną, która wyznacza jednoznacznie jej denotację.[3] Wprowadzimy pojęcie determinantu relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów. Determinantem takiej relacji jest para uporządkowana, której pierwszym członem jest ta relacja, a drugiej członem ciąg (układ uporządkowany) przedmiotów, do którego jest ona ograniczona. Determinant relacji ograniczonej wyznacza jednoznacznie tę relację, analogicznie jak konotacja nazwy wyznacza jej denotację, bowiem relacja ograniczona do ciągu przedmiotów jest wyznaczona jednoznacznie przez to, jaka to jest relacja i jaki to jest ciąg przedmiotów. Determinant relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów odpowiada konotacji wyrażenia denotującego tę relację, gdyż na tę konotację składają się dwie cechy, z których pierwsza charakteryzuje relację, a druga ciąg przedmiotów, do których ta relacja jest ograniczona.

Wprowadzamy określenie:

DI. $\mathcal{D}(R^{(n)}|b_1,\ldots,b_n) = \langle R^{(n)},\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\rangle$

Funkcja $\mathcal{D}$ dla relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów określa jej determinant.

Przyjmujemy, że stanem rzeczy opisywanym przez wyrażenie ϕ w modelu M przy wartościowaniu h jest $\mathcal{D}(S_M(\phi,h))$.

Wprowadzamy określenie:

DII. $\mathcal{E}!\mathcal{D}(R^{(n)}|b_1,\ldots,b_n) \equiv E!\,R^{(n)}|b_1,\ldots,b_n$

W myśl wprowadzonych określeń:

$$\mathcal{E}!\langle R^{(n)},\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\rangle \equiv R^{(n)}(b_1,\ldots,b_n)$$

Wyrażenie: $\mathcal{E}!$ czytamy: istnieje.

Mówimy więc, że determinant relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ta relacja jest niepusta. Warunek ten jest

[3] Por. K. Ajdukiewicz. *Logika Pragmatyczna.* Warszawa 1965 s. 50–52.

spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy ta relacja zachodzi między przedmiotami tego ciągu.

W związku z trudnością, o której była mowa na początku tych uwag, stany rzeczy opisywane przez wyrażenia zdaniowe w modelu M przy wartościowaniu h traktujemy nie jako relacje ograniczone do ciągu przedmiotów, ale jako determinanty takich relacji. Choć takie relacje mogą być puste, to ich determinanty nie są puste. A więc stan rzeczy opisywany przez dane wyrażenie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ograniczona wyznaczona przez ten stan rzeczy (tj. przez jej determinant) jest niepusta.

Korzystając z symbolu określonego w D9 i używając symbolu $S'_M(\phi, h)$ na oznaczenie stanu rzeczy opisywanego przez wyrażenie ϕ w modelu M przy wartościowaniu h (w sensie, o którym była wyżej mowa), możemy ten symbol wprowadzić przy pomocy określenia:

DIII. $S_M(\phi, h) = R^{(n)}|b_1, \ldots, b_n \rightarrow S'_M(\phi, h) = \langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \rangle$

Według zaproponowanych określeń różne zdania fałszywe opisują różne stany rzeczy, a podstawowe twierdzenia artykułu zachowują przy takim ujęciu swą ważność.

Obecnie wskażę, jak można przeredagować artykuł tak, by nie wprowadzać definicji D9, według której stanem rzeczy opisywanym przez dane zdanie jest odpowiednia relacja ograniczona do ciągu przemiotów, lecz przyjąć określenie, w myśl którego takim stanem rzeczy jest determinant odpowiedniej relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów. Bez zmiany pozostaje tekst artykułu do definicji D7 włącznie.

Rezygnujemy z definicji D8a–f.

Tak samo jak w artykule dowodzimy L1, Wn.1 i L3a,b, który tu oznaczymy jako L2a,b.

Wprowadzamy definicje:

D8. $\mathcal{D}(R^{(n)}|b_1, \ldots, b_n) = \langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \rangle$

Definicja D8 określa determinant relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów.

D9. $\mathcal{E}!\mathcal{D}(R^{(n)}|b_1, \ldots, b_n) \equiv E!\, R^{(n)}|b_1, \ldots, b_n$

W myśl D9 determinant relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ta relacja jest niepusta.

D10. $\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle \cdot \langle S^{(m)}, \langle b_{n+1}, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle =$
$$= \langle R^{(n)} \cdot S^{(m)}, \langle b_1, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle$$

D11. $\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle + \langle S^{(m)}, \langle b_{n+1}, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle =$
$$= \langle R^{(n)} + S^{(m)}, \langle b_1, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle$$

D12. $-\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle = \langle -R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$

D13. $gen(i^t, \langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle) = \langle (gen(i^t, R^{(n)})), \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$

D14. $ex(i^t, \langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle) = \langle (ex(i^t, R^{(n)})), \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$

Z L1 i D9 wynika:

L3. $\mathcal{E}!\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n \rangle\rangle \equiv R^{(n)}(b_1, \ldots, b_n)$

Z L3 i D4 wynika:

L4a. $\mathcal{E}!\langle R^{(n)} \cdot Q^{(m)}, \langle b_1, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle \equiv$
$$\equiv \mathcal{E}!\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle \wedge \mathcal{E}!\langle Q^{(m)}, \langle b_{n+1}, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle$$

Z L3 i D5 wynika:

L4b. $\mathcal{E}!\langle R^{(n)} + Q^{(m)}, \langle b_1, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle \equiv$
$$\equiv \mathcal{E}!\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle \vee \mathcal{E}!\langle Q^{(m)}, \langle b_{n+1}, \ldots, b_{n+m}\rangle\rangle$$

Z definicji dopełnienia relacji i D9 wynika:

L5. $\sim \mathcal{E}!\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle \equiv \mathcal{E}! - \langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$

Z L3 i L2a,b wynika:

L6a. $\mathcal{E}!\, gen(i^t, \langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\rangle\rangle) \equiv$
$$\equiv \forall_{b \in B^t} \mathcal{E}!\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \ldots, b_n\rangle\rangle$$

L6b. $\mathcal{E}!\, ex(i^t, \langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\rangle\rangle) \equiv$
$$\equiv \exists_{b \in B^t} \mathcal{E}!\langle R^{(n)}, \langle b_1, \ldots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \ldots, b_n\rangle\rangle$$

Definicje D10–D14 określają operacje rozszerzonego iloczynu, rozszerzonej sumy, dopełnienia, generalizacji i partykularyzacji determinantów relacji ograniczonych do ciągów przedmiotów. Operacje te od determinantów prostszych relacji ograniczonych do ciągów przedmiotów prowadzą do determinantów złożonych takich relacji.

Posługując się wprowadzonymi pojęciami określamy stan rzeczy opisywany przez wyrażenie zdaniowe ϕ języka J w modelu M przy wartościowaniu h, dla którego używamy symbolu: $S_M(\phi, h)$. Definicja tego pojęcia jest definicją indukcyjną. Określając w punkcie 1° tej definicji stan rzeczy opisywany przez wyrażenie atomiczne oznaczamy je tak samo jak w D1.1°.

D15.1°. $S_M(\ulcorner W_0(W_1, \ldots, W_n)\urcorner, h) = \langle W_0^*, \langle W_1^*, \ldots, W_n^* \rangle\rangle$,

$$\text{gdzie dla } 0 \leq i \leq n : W_i^* = \begin{cases} f(W_i), & \text{jeśli } W_i \text{ jest stałą} \\ h(W_i), & \text{jeśli } W_i \text{ jest zmienną} \end{cases}$$

D15.2°.a. $S_M(\ulcorner \sim \phi \urcorner, h) = -S_M(\phi, h)$

b. $S_M(\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner, h) = S_M(\phi, h) \cdot S_M(\psi, h)$

c. $S_M(\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner, h) = S_M(\phi, h) + S_M(\psi, h)$

D15.3°.a. $S_M(\ulcorner \underset{x_i^t}{\forall} \phi \urcorner, h) = gen(i^t, S_M(\phi, h))$

b. $S_M(\ulcorner \underset{x_i^t}{\exists} \phi \urcorner, h) = ex(i^t, S_M(\phi, h))$

T1. Jeśli ϕ jest wyrażeniem zdaniowym języka J, to

$$W_M(\phi, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h)$$

a więc: wyrażenie zdaniowe ϕ języka J jest spełnione w modelu M przy wartościowaniu h wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stan rzeczy opisywany przez wyrażenie ϕ w modelu M przy wartościowaniu h.

Dowód T1 jest indukcyjny.

a. Dla wyrażeń atomicznych otrzymujemy:

1. $W_M(\ulcorner W_0(W_1, \ldots, W_n)\urcorner, h) = 1 \equiv W_0^*(W_1^*, \ldots, W_n^*)$,

$$\text{gdzie dla } 0 \leq i \leq n : W_i^* = \begin{cases} f(W_i), & \text{jeśli } W_i \text{ jest stałą} \\ h(W_i), & \text{jeśli } W_i \text{ jest zmienną} \end{cases} \qquad \text{D1.1}$$

2. $\mathcal{E}!S_M(\ulcorner W_0(W_1 \ldots, W_n)\urcorner, h) \equiv \mathcal{E}!\langle W_0^*, \langle W_1^*, \ldots, W_n^* \rangle\rangle$

$$\text{gdzie dla } 0 \le i \le n : W_i^* = \begin{cases} f(W_i), & \text{jeśli } W_i \text{ jest stałą} \\ h(W_i), & \text{jeśli } W_i \text{ jest zmienną} \end{cases} \qquad \text{D15.1}$$

3. $W_0^*(W_1^*, \ldots, W_n^*) \equiv \mathcal{E}!\langle W_0^*, \langle W_1^*, \ldots, W_n^* \rangle\rangle$ — L3

$W_M(\ulcorner W_0(W_1, \ldots, W_n)\urcorner, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\ulcorner W_0(W_1 \ldots, W_n)\urcorner, h)$ — 1, 2, 3

b.1. $W_M(\phi, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h)$ — z. ind.

2. $W_M(\phi, h) \neq 1 \equiv {\sim}\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$ — 1

$W_M(\ulcorner \sim \phi\urcorner, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\ulcorner \sim \phi\urcorner, h)$ — 2, D1.2a, D15.2a, L5

c.1. $W_M(\phi, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h)$ — z. ind.

2. $W_M(\psi, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\psi, h)$ — z. ind.

3. $W_M(\phi, h) = 1 \wedge W_M(\psi, h) = 1 \equiv$

$\equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h) \wedge \mathcal{E}!S_M(\psi, h)$ — 1, 2

$W_M(\ulcorner \phi \wedge \psi\urcorner, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\ulcorner \phi \wedge \psi\urcorner, h)$ — D1.2b, D15.2b, L4a, 3

d.1. $W_M(\phi, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h)$ — z. ind.

2. $W_M(\psi, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\psi, h)$ — z. ind.

3. $W_M(\phi, h) = 1 \vee W_M(\psi, h) = 1 \equiv$

$\equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h) \vee \mathcal{E}!S_M(\psi, h)$ — 1, 2

$W_M(\ulcorner \phi \vee \psi\urcorner, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\ulcorner \phi \vee \psi\urcorner, h)$ — D1.2c, D15.2c, L4b, 3

e.1. $W_M(\phi, h\binom{i}{b}) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h\binom{i}{b})$ — z. ind.

2. $W_M(\ulcorner \forall_{x_i^t} \phi\urcorner, h) = 1 \equiv \forall_{b \in B^t} W_M(\phi, h\binom{i}{b}) = 1$ — D1.3a

3. $\mathcal{E}!S_M(\ulcorner \forall_{x_i^t} \phi\urcorner, h) \equiv \mathcal{E}!\, gen(i^t, S_M(\phi, h))$ — D15.3a

4. $\mathcal{E}!\, gen(i^t, S_M(\phi, h)) \equiv \forall_{b \in B^t} \mathcal{E}!S_M(\phi, h\binom{i}{b})$ — L6a

$W_M(\ulcorner \forall_{x_i^t} \phi\urcorner, h) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\ulcorner \forall_{x_i^t} \phi\urcorner, h)$ — 1, 2, 3, 4

f.1. $W_M(\phi, h\binom{i}{b}) = 1 \equiv \mathcal{E}!S_M(\phi, h\binom{i}{b})$ — z. ind.

2. $W_M(\ulcorner \exists_{x_i^t} \phi\urcorner, h) = 1 \equiv \exists_{b \in B^t} W_M(\phi, h\binom{i}{b}) = 1$ — D1.3b

3. $\mathcal{E}!S_M(\ulcorner \exists_{x_i^t} \phi\urcorner, h) \equiv \mathcal{E}!\, ex(i^t, S_M(\phi, h))$ — D15.3b

4. $\mathcal{E}!\, ex(i^t, S_M(\phi, h)) \equiv \underset{b \in B^t}{\exists} \mathcal{E}! S_M(\phi, h(^i_b)))$ L6b

$W_M(\ulcorner \underset{x_i^t}{\exists} \phi \urcorner, h) = 1 \equiv \mathcal{E}! S_M(\ulcorner \underset{x_i^t}{\exists} \phi \urcorner, h)$ 1, 2, 3, 4

Dwie definicje prawdziwości wyrażenia zdaniowego ϕ w modelu M mają postać:

D16. $\phi \in Vr_1(M) \equiv \underset{h}{\forall} W_M(\phi, h) = 1$

Wyrażenie ϕ jest prawdziwe w modelu M wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełnione w modelu M przy każdym wartościowaniu.

D17. $\phi \in Vr_2(M) \equiv \underset{h}{\forall} \mathcal{E}! S_M(\phi, h)$

Wyrażenie ϕ jest prawdziwe w modelu M wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym wartościowaniu istnieje stan rzeczy opisywany przez wyrażenie ϕ w modelu M przy tym wartościowaniu.

Z T1, D16, D17 wynika:

T2. $\phi \in Vr_1(M) \equiv \phi \in Vr_2(M)$

Udowodniliśmy więc równoważność tych dwóch definicji prawdziwości wyrażeń zdaniowych języka J w modelu M, przy czym druga z tych definicji jest sformułowana przy użyciu pojęcia stanu rzeczy określonego w D15.

Prof. dr Maria Kokoszyńska-Lutmanowa po przeczytaniu pierwszego z moich artykułów poświęconych omawianej tu koncepcji powiedziała mi, że Kazimierz Twardowski obawiał się, że określanie pojęcia prawdziwości zdania przy użyciu pojęcia stanu rzeczy opisywanego przez to zdanie może prowadzić do tej konsekwencji, że stany rzeczy opisywane przez zdania równoważne są identyczne. Chciałbym więc zwrócić uwagę, na to, że w myśl mojej koncepcji — zwłaszcza w ujęciu przedstawionym tutaj — tak nie jest. Stany rzeczy opisywane przez zdania równoważne, a nawet logicznie równoważne, mogą być różne. Dwa stany rzeczy rozumiane jako pary uporządkowane złożone z relacji i ciągu jej argumentów są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy identyczne są ich pierwsze elementy i identyczne są ich drugie elementy, tj. gdy chodzi o tę samą relację i o ten sam ciąg argumentów. Weźmy pod uwagę przykład dwóch zdań podanych poprzednio: (1) Liczba -2 jest liczbą naturalną. (2) Liczba -4 jest liczbą naturalną. Stanem rzeczy opisywanym przez zdanie (1) jest para uporządkowana $\langle \in, \langle -2, \mathcal{N} \rangle \rangle$, która jest determinantem relacji $\in |-2, \mathcal{N}$; stanem rzeczy opisywanym przez zdanie (2) jest para uporządkowana $\langle \in, \langle -4, \mathcal{N} \rangle \rangle$, która jest determinantem relacji $\in |{-4}, \mathcal{N}$. Oba te zdania są fałszywe. W myśl D9 oba te stany rzeczy nie isnieją, gdyż są determinantami relacji pustych. Jednakże te stany rzeczy są różne, gdyż różne są drugie ich elementy.

Na podstawie definicji D10–D15 dla każdego wyrażenia zdaniowego ϕ języka J można podać stan rzeczy opisywany przez ϕ w modelu M przy wartościowaniu h, który jest parą uporządkowaną o postaci $\langle R^{(n)}, \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \rangle$, przy czym relacja $R^{(n)}$ może być utworzona z jakichś relacji za pomocą operacji określonych w definicjach D10–D14.

Podamy obecnie kilka przykładów stanów rzeczy opisywanych przez określone wyrażenia.

Przyjmijmy, że język J jest językiem arytmetyki liczb naturalnych, model $M = \langle \mathcal{N}, f \rangle$, gdzie $\mathcal{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych, zaś f jest funkcją przyporządkowującą stałym arytmetyki liczb naturalnych denotowane przez nie przedmioty o bazie $\mathcal{N}$.

Przykład 1. Przyjmijmy, że $\phi =$"$x_1 < x_2$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennej x_1 liczbę 2, zaś zmiennej x_2 liczbę 3. Wtedy $S_M(\phi, h) = \langle <, \langle 2, 3 \rangle \rangle$. Stwierdzamy, że $\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$, gdyż ten stan rzeczy jest determinantem niepustej relacji $< |2, 3$.

Przykład 2. Przyjmijmy, że $\phi =$"$x_1 < x_2$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennej x_1 liczbę 3, zaś zmiennej x_2 liczbę 2. Wtedy $S_M(\phi, h) = \langle <, \langle 3, 2 \rangle \rangle$. Stwierdzamy, że $\sim\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$, gdyż ten stan rzeczy jest determinantem pustej relacji $< |3, 2$.

Przykład 3. Przyjmijmy, że $\phi =$"$2 < 3$". Wtedy dla dowolnego wartościowania h: $S_M(\phi, h) = \langle <, \langle 2, 3 \rangle \rangle$. Stwierdzamy, że $\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$, gdyż relacja $< |2, 3$ jest niepusta.

Przykład 4. Przyjmijmy, że $\phi =$"$x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennym x_1, x_2, x_3 odpowiednio liczby 2,3,4. Wtedy $S_M(\phi, h) = \langle < \cdot <, \langle 2, 3, 3, 4 \rangle \rangle$. Stwierdzamy, że $\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$, gdyż relacja $(< \cdot <)|2, 3, 3, 4$ jest niepusta.

Przykład 5. Przyjmijmy, że $\phi =$"$x_2 < x_3 \wedge x_1 < x_2$", a wartościowanie h jest tą samą funkcją, co w przykładzie 4. Wtedy $S_M(\phi, h) = \langle < \cdot <, \langle 3, 4, 2, 3 \rangle \rangle$. Stwierdzamy, że $\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$.

Wyrażenia przytoczone w przykładach 4 i 5 są logicznie równoważne, ale stany rzeczy opisywane przez te wyrażenia (przy tym samym wartościowaniu) są różne, gdyż różne są ich drugie elementy. Widać stąd, że stany rzeczy opisywane przez wyrażenia równoważne, a nawet logicznie równoważne, nie muszą być identyczne. Natomiast jeśli ϕ jest równoważne z ψ, to

$$\mathcal{E}!S_M(\phi, h) \equiv \mathcal{E}!S_M(\psi, h)$$

Przykład 6. Przyjmijmy, że $\phi =$ "$\exists_{x_2} (x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3)$", a wartościowanie h przyporządkowuje zmiennej x_1 liczbę 2, a zmiennej x_3 liczbę 4. (Pominęliśmy tu górny indeks 0 przy zmiennej, której wartościowania przyporządkowują przedmioty typu 0 o bazie $\mathcal{N}$). Wtedy $S_M(\phi, h) = \langle ex(2, < \cdot <), \langle 2, 4 \rangle \rangle$. Ten stan rzeczy jest determinantem relacji $ex(2, < \cdot <)|2, 4$, która jest niepusta, gdyż $\exists_{b \in \mathcal{N}} (2 < b \wedge b < 4)$. A więc $\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$.

Przykład 7. Przyjmijmy, że $\phi =$ "$\forall_{x_1} \exists_{x_2} x_1 < x_2$". Wtedy dla dowolnego h: $S_M(\phi, h) = \langle gen(1, ex(2, <)), \langle b_1, b_2 \rangle \rangle$. Stwierdzamy, że $\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$, gdyż $\forall_{b_1 \in \mathcal{N}} \exists_{b_2 \in \mathcal{N}} b_1 < b_2$, a więc relacja $gen(1, ex(2, <))|b_1, b_2$, której determinantem jest ten stan rzeczy, jest niepusta. (Przy interpretacji metajęzykowej zmiennym x_1, x_2 języka J przyporządkowuje się odpowiednio zmienne b_1, b_2 metajęzyka J jako argumenty funktora "$<$", dla którego w języku i metajęzyku używamy tego samego symbolu).

Przykład 8. Przyjmijmy, że $\phi =$ "$\forall_{x_2} \exists_{x_1} x_1 < x_2$". Wtedy dla dowolnego h: $S_M(\phi, h) = \langle gen(2, ex(1, <)), \langle b_1, b_2 \rangle \rangle$. Stwierdzamy, że $\sim\mathcal{E}!S_M(\phi, h)$, gdyż $\sim\forall_{b_2 \in \mathcal{N}} \exists_{b_1 \in \mathcal{N}} b_1 < b_2$, a więc relacja $gen(2, ex(1, <))|b_1, b_2$, której determinantem jest ten stan rzeczy, jest pusta.

Ogólnie, jeśli wyrażenie ϕ jest utworzone przy pomocy stałych logicznych (funktorów rachunku zdań, kwantyfikatorów) $s_1, \ldots, s_k$ z wyrażeń atomicznych $\phi_1, \ldots, \phi_m$, zbudowanych odpowiednio z predykatów lub zmiennych predykatowych $P_1, \ldots, P_m$ i ich argumentów, to $S_M(\phi, h)$ jest utworzony z $S_M(\phi_1, h), \ldots, S_M(\phi_m, h)$ za pomocą operacji odpowiadających w myśl D15 stałym $s_1, \ldots, s_k$ i ma postać pary uporządkowanej $\langle R^{(n)}, \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle \rangle$, gdzie relacja $R^{(n)}$ jest utworzona z relacji $R_1, \ldots, R_m$, przyporządkowanych odpowiednio przez f lub h predykatom lub zmiennym predykatowym $P_1, \ldots, P_m$, za pomocą operacji odpowiadających w myśl D15 stałym $s_1, \ldots, s_k$.

Stąd, że wyrażenie $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ można zdefiniować jako $\ulcorner \sim \phi \vee \psi \urcorner$, zaś wyrażenie $\ulcorner \phi \equiv \psi \urcorner$ można zdefiniować jako $\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \urcorner$, wynika, że:

$$S_M(\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner, h) = -S_M(\phi, h) + S_M(\psi, h)$$
$$S_M(\ulcorner \phi \equiv \psi \urcorner, h) = S_M(\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner, h) \cdot S_M(\ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner, h)$$

Pozostaje jeszcze do krótkiego zrekapitulowania sprawa związku zachodzącego między pojęciem stanu rzeczy zdefiniowanym w D15 a pojęciem stanu rzeczy formułowanym w języku naturalnym, o którym była mowa na początku tych uwag.

W języku naturalnym powiemy, że stanem rzeczy opisywanym przez zdanie "$3 > 2$" jest bycie większym liczby 3 od liczby 2. Ten stan rzeczy może być uważany za relację $> |3, 2$, tj. relację większości ograniczoną do ciągu liczb 3,

2. Z powodu trudności, o której była mowa na początku tych uwag, w myśl D15 stanem rzeczy opisywanym przez to zdanie jest para uporządkowana $\langle >, \langle 3,2\rangle\rangle$, która wyznacza jednoznacznie przytoczoną powyżej relację.

W języku naturalnym powiemy, że stanem rzeczy opisywanym przez zdanie "$2 \in \mathcal{N}$" jest przynależność liczby 2 do zbioru $\mathcal{N}$. Ten stan rzeczy może być uważany za relację bycia elementem ograniczoną do ciągu 2, $\mathcal{N}$. Z powodu trudności wspomnianej powyżej w myśl D15 stanem rzeczy opisywanym przez to zdanie jest para uporządkowana $\langle \in, \langle 2,\mathcal{N}\rangle\rangle$, która wyznacza jednoznacznie przytoczoną powyżej relację.

Można stwierdzić ogólnie, że w myśl D15 stanem rzeczy opisywanym przez zdanie ϕ jest para uporządkowana, która jest determinantem odpowiedniej relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów, a więc wyznacza jednoznacznie tę relację. Tę zaś relację można traktować jako sformułowany za pomocą pojęć logiki współczesnej odpowiednik stanu rzeczy opisywanego w języku naturalnym przez zdanie ϕ. Do takiego ujęcia skłania nas trudność omówiona na początku tych uwag, która uniemożliwia bezpośrednie traktowanie odpowiedniej relacji ograniczonej do ciągu przedmiotów jako stanu rzeczy opisywanego w języku naturalnym przez dane zdanie.

SUPPLEMENTARY REMARKS TO MY PAPER *A PROOF OF THE EOUIVALENCE OF TWO FORMULATIONS OF THE CLASSICAL DEFINITION OF TRUTH*

Summary

In the paper cited in the title of these remarks the state of affairs described by a proposition is defined as a suitable relation restricted to a sequence of objects. Against this conception the following objection is raised: Under this interpretation the states of affairs deseribed by two false propositions are identical, since each of them – as nonexisting – is equal to the empty set. In consequence the states of affairs described by the negations of these propositions, which are true propositions, are also identical. This objection is not directed against the theorems and proofs given in the above mentioned paper but only it is directed against the applying of the concepts introduced in the paper to suitable examples. The source of the divergenee between the treating of the conception of states of affairs in a natural language and the treating of this conception presented in the above mentioned paper is explained in the present paper. Such a modification of the definition of a state of affairs introduced in the above mentioned paper is now formulated that this objection does not refer to it. The determinant of a relation restricted to a sequence of objects is defined as such an ordered pair that this relation is its first element and the sequence of objects to which it is restricted is its second element. The state of affairs described by a proposition is defined as the determinant of a suitable relation restricted to a sequence of objects. We say that this determinant exists if and only if this relation is nonempty. After introducing suitable definitions, especially the definitions D10–D14, which define the operations of the extended product, extended sum, complement, generalization and particularization of the determinants of relations restricted to sequences of objects, all theorems about states of afairs presented in the above mentioned paper are proved. The states of affairs described by equivalent, and even logically equivalent propositions can be different.