

STANISŁAW MAJDAŃSKI

LOGIKA: CZY- ILO- I JAK WARTOŚCIOWA?

(I) Niewątpliwie problematyka logiki rozpatrywanej od strony jej wartości logicznych, w szczególności logiki formalnej, a logiki zdań przede wszystkim, jest niezwykle szeroka. A przy tym nader interesująca, zwłaszcza gdy jest wzięta we wszechstronnej interproblemowej koneksji, co w danym przypadku wydaje się prawie naturalne, ale i niełatwe, zważywszy obarczenia szeregiem nieporozumień, a nawet mistyfikacji, w tym kręgu filozoficznym. Wchodzi nadto w grę i rzecz dodatkowo uciekawia i utrudnia długa tradycja historyczna zagadnień, które mają poważne i interesujące starożytne jeszcze, a szczególnie średniowieczne antecedencje.

Bogata współczesna literatura przedmiotu i okółprzedmiotowa wciąż narasta. Śladem klasycznych już prac Jana Łukasiewicza i Emila L. Posta, głównych nowożytnych twórców logiki wielowartościowej (do prekursorów zalicza się H. MacColla, Ch.S. Peirce'a i N.A. Wasiliewa, nie licząc antycypatorów) powstawały i tworzone są coraz to nowe wielowartościowe konstrukcje. Nie obywa się też bez metodologicznych co do nich uwag, formalnych spekulacji, merytorycznych refleksji i poszukiwań historycznych. Gdy chodzi o polską linię badań znaczonych nazwiskiem J. Łukasiewicza i głównie jego udziałem — tradycja ta najbardziej nas zresztą interesuje — wymienimy niektórych bezpośrednich jego uczniów i kontynuatorów: M. Wajsberga, B. Sobocińskiego i J. Słupeckiego, a także, z różnych względów: S. Jaśkowskiego, J. Łosia, H. Greniewskiego, R. Suszkę, I.M. Bocheńskiego; dołączmy A.N. Priora. Przegląd całościowy stanu badań zawierają książki: J.B. Rossera, A.R. Turquette'a, a zwłaszcza nowsze A.A. Zinowiewa i N. Reschera: znaleźć w nich można szereg wartościowych informacji, analiz i uwag porównawczych (wiele ich u Priora, a także u Greniewskiego, Suszki, Bocheńskiego i innych)¹.

¹ Rezygnując w zasadzie (ze względu na brak miejsca) z odwołań do literatury odnosimy generalnie do książki N. Reschera *Many-valued Logic* (New York 1969), zawierającej bogatą bibliografię w układzie historycznym (237-285), z wykazem alfabetycznym autorów (285-305) i problemowym (305-331). Rescher pomija jednak J. Łukasiewicza *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* z 1913 r. (tłum. pol. *Podstawy logiczne rachunku prawdopodobieństwa*. W: *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*. Warszawa 1971 s. 73-113), w którym interesująco klaruje się koncepcja wielowartościowości w dyskusyjnym nawiązaniu do idei B. Bolzana.

Geneza problematyki wiąże się w sposób charakterystyczny ze sprawą zastosowań logiki. Zdarza się przy tym, że:

Mamy tu do czynienia z koniecznością wyboru w sytuacji poznawczo trudnej i stając wobec problemu, co należy modyfikować: a) aplikowany system, czy b) materiał aplikacyjny, znajdujemy, że u źródeł powstania logik (systemów) wielowartościowych — i w ogóle nieklasycznych — leży chyba respektowanie, a nawet preferencja tej pierwszej — (a) — możliwości (I, 1). To nie ułatwia bynajmniej sprawy. Poza tym, metalogiczna kwestia wartościowości logiki, a więc i ilości i jakości wartości jest w sporej mierze filozoficzna, a to komplikuje sprawę. Stawiając te kwestie zakłada się, że logika, systemy logiczne, jest jakoś wartościowa ze względu na wartość (wartości) jej wyrażań zdaniowych, ale to jest przecież nasz pierwszy problem z tytułowego trójproblemu.

Problematykę tytułową daje się pomieścić w ramach szerzej pojętej semiotyki logiki formalnej, należącej do — *sensu largo* — (meta)logiki. I tak właśnie rzecz spróbujemy tutaj rozpatrzeć. Praktycznie uwagi tu zawarte dotyczą logiki zdań, dotyczą w sensie poniżej wyjaśnianym. Przez to zaś, że jest ona działem logiki formalnej w znanym znaczeniu pierwszym, dotykamy logiki formalnej jako pewnej całości, przynajmniej jeśli żywić jakieś niezminimalizowane ambicje poznawcze. Wartości zwane logicznymi są wartościami wyrażań o charakterze zdaniowym, stąd obracamy się zarazem w kręgu problematyki semiotyki zdania.

Pytania tytułowe brzmią nader ogólnie i poniekąd maksymalistycznie. Zauważmy:

Jeśli nie mają być tylko skrótem, sugerować mogą, że istnieje logika jako pewna całościowa spójna dziedzina, tymczasem sytuacja wydaje się podobna do tej, jaka jest w matematyce, a raczej w kręgu dyscyplin matematycznych; w niejednym okazuje się logika po prostu pewnym niedostatecznie, jak się wydaje, zwartym zbiorem dyscyplin logicznych (I, 2). I powstają wciąż nowe systemy logiczne, a różnice zdań co do tego, czym jest logika, jako taka, pozostają. W tej optyce pytania tytułowe można traktować jako wyraz pewnego „relatywistycznego”, jak się czasem trochę myląc powiada, spojrzenia na logikę. Dopuszczają bowiem myśl o takim lub innym statusie (klas) systemów logicznych i wartości ich wyrażań zdaniowych, ze względu na które systemy się rozpatruje. Z drugiej jednak strony, utrzymuje się mimo wszystko — ta jakaś zasadnicza tendencja — teoretyczna lub praktyczna — do widzenia logiki jako pewnej zbornej całości systemów, a nie tylko dość luźnego ich zbioru. Więcej, istnieje dążenie do uczynienia logiki bardziej całościową dziedziną. Trend to nie tylko dydaktyczny, choć z pewnością dydaktycznie bardzo ważny.

Licząc się z powyższym powiemy, że:

Pytania tytułowe można rozpatrywać jako dotyczące wartości logicznych — ich istnienia, ilości i jakości — 1° zdań, wyrażen zdaniowych, 2° poszczególnych systemów logicznych, 3° grup tych systemów, 4° wszystkich tych systemów — *de facto* lub *de iure* (I, 3). Przez system logiczny rozumie się tutaj formalizm, czyli rachunek logiczny, ale wraz z jego interpretacją semantyczno-matrycową (na pewno formalną, a — zależnie od koncepcji logiki — treściową). Za systemem „kryje się” określający go metasystem (interpretacja matrycowa należy już formalnie do metasystemu, w węższym znaczeniu: gdy system utożsamia się jedynie z rachunkiem logicznym, formalnym). Poza systemem są również jego zastosowania do jakiejś dziedziny, uzyskane poprzez pozalogiczne podstawienia za zmienne i intuicyjne interpretacje stałych logicznych systemu. Te i inne tego rodzaju rozgraniczenia zależą od przyjętej koncepcji logiki (formalnej): formalistycznej, instrumentalistycznej, przedmiotowej, a także jakiejś medialnej, którą tu zakładamy, nastawionej na pewne związki z dziedzinami zastosowań rachunków logicznych.

Naturalnie, sprawy wyglądają łatwo z uproszczonego punktu widzenia. Dla ilustracji: są systemy dwu i więcej wartościowe w zależności od zaistniałych potrzeb (poza)logicznych: nie ma więc zasadniczo problemu jakiegoś konfliktu między tymi a innymi systemami. Ostatecznie, w takim podejściu rzecz sprowadza się do nieinformatywnej tautologii, gdy chodzi np. o odpowiedź na pytanie o liczbę wartości logicznych: z dwuwartościowego punktu wiedzenia logika — systemy logiczne ze względu na ich wyrażenia zdaniowe — jest dwuwartościowa, a ze stanowiska wielowartościowego — wielowartościowa. Tak więc jakaś kolizja jest wprost *ex definitione* niemożliwa; jeśli pojawia się, to jest co najwyżej pozorna.

W rzeczy samej nie są to tak proste sprawy, gdy spojrzeć na nie mniej powierzchownie, a raczej mniej powierzchniowo — co nie przeszkadza temu, że kolejno pogłębione widzenie może właśnie nawiązywać do powierzchniowego. Istnieje, jak wspomniano, ambitna i niełatwa tendencja do bardziej rygorystycznego traktowania związków między systemami logicznymi, do bardziej spójnego rozumienia logiki (formalnej). Inna rzecz, iż prowadzić to może do wyłączenia pewnych systemów z jej obszaru. Nie byłby to wtedy tylko jakiś luźny zestaw systemów o nader zróżnicowanych własnościach, lecz ich zespół odznaczający się pewnymi zasadniczymi własnościami wspólnymi, wyznaczającymi to, co nazywa się po prostu logiką.

W szkicu niniejszym chodzi głównie o eksplikację problemów tytułowych, tytułowego trójproblemu. Nastawienie w zasadzie eksplikacyjne do-

tyczy m.in. pewnych ujawnionych nieporozumień, jak również preferencji lub dyspreferencji niektórych, głównie elementarnych, rozwiązań. Wykorzystuje się przy tym pewną względność a raczej mobilność znaczeniową wchodzących tu w grę wieloznacznych terminów; dokonuje się odpowiedniego doboru z zestawu nieustalonych ostatecznie znaczeń wyrażen takich, jak: „wartość zdania”, „wartość logiczna”, „dwuwartościowy”, „wielowartościowy”, „zasada dwuwartościowości” i in. Uwzględnia się też pewną swobodę w zakresie konstrukcji nowych wartości i wartościowania zdań, w tym zdań złożonych ze względu na funktory logiki zdań. Oczywiście, jak to już podkreślono, cała ta problematyka do logiki (formalnej) nie należy, choć jej dotyczy; jest metalogiczna, w tym z zakresu semiotycznych i filozoficznych podstaw logiki.

Współczesny problem statusu logik tak zwanych wielowartościowych i ich stosunku do logiki klasycznej (systemów klasycznych) zaistniał wraz z powstaniem wielowartościowych systemów.

Zarysowały się i wyprecyzowały dwa zasadnicze i skrajnie opozycyjne stanowiska w sprawie wartościowości logiki, ogółu systemów logicznych ze względu na wartości ich wyrażen zdaniowych: (i) postawa (pro)dwuwartościowa, (ii) postawa anty(pro)dwuwartościowa; do pomyslenia są i bywają (iii) postawy medialne, mniej wyraźne lub bardziej subtelne niż wymienione skrajne (I, 4) ². Celowe wydaje się jakieś przezwyciężenie obu postaw skrajnych, zdezabsolutyzowanie ich, wyznaczenie właściwego im zakresu obowiązywalności. Praktycznie jednak nie jest to łatwe. Kuszą bowiem szerokie, zda się, uwrażliwione na pewnego typu ogólność, perspektywy antybinaryzmu. A jeszcze bardziej urzekająco prezentuje się binaryzm prosty i zorientowany redukcjonistycznie. Sam Łukasiewicz zajmował z czasem stanowisko w omawianej sprawie raczej umiarkowane (powiedzmy tak z grubsza, nie wchodząc w szczegóły), wahał się jednak w swym stanowisku.

Dziś przeważa raczej postawa (i) lub zbliżające się do niej stanowiska pośrednie. I tak powtarza się, że systemy wielowartościowe to raczej rachunki stricte formalne a nie systemy logiczne; że to nawet zabawa bardziej niż logika; że są trudności, gdy chodzi o ich sens intuicyjny (i zastosowania, o tym jeszcze potem). Wskazuje się też, że systemy wielowartościowe są — z pewnego punktu widzenia — jako dwuwartościowe, zakładają binarność w taki czy inny sposób. Sugeruje się czasem, że ra-

² Por. H. Greniewski. *2n+1 wartości logicznych*. W: *Sprawy wszystkie i jeszcze inne*. Warszawa 1970 s. 127-201. Autor wyodrębnia obozy: dwu, pseudo i antydwuwartościowców, w pierwszym zaś dwa stanowiska, w drugim i trzecim po trzy (136-143).

chunki wielowartościowe nie stanowią logiki o tyle, że ta jako dyscyplina ściśle formalna, uprawiana jedynie na poziomie rachunkowo-syntaktycznym abstrahuje w ogóle od czegoś takiego jak wartości logiczne (nawet formalnie ujęte). Problem wartościowości bierze się wtedy z zewnątrz, np. z problematyki zastosowań logiki, a jeśli wartości mają interpretację intuicyjną, to raczej z filozofii, do której teoretycznie powinny należeć. Dodajmy krytycznie, że z analogicznych powodów nie można by w takiej optyce mówić również i o logice dwuwartościowej...

Wielowartościowcy „rasowi” wskazują z reguły na wielość samych wartości logicznych. Na to, że wartości klasyczne są częścią skończonego lub nieskończonego zbioru wartości logicznych. Zwracają też uwagę na pewne konsekwencje wielowartościowości; podkreślają mianowicie, że zmienia się zbiór praw, pewne odpowiedniki praw logiki klasycznej lub tradycyjnej nie obowiązują, „odpadają”; dodajmy od razu, uprzedzając nieco późniejsze analizy, że to skutek takich a nie innych przyjętych wartościowań funktorów, wartościowań, które mogą być zresztą inne. Powołują się też wielowartościowcy na pewne analogie z innymi nauk, szczególnie chętnie na geometrie nieeuklidesowe, które powstały z zanegowania pewnych limitujących geometrię klasyczną podstaw (piąty postulat Euklidesa, trójwymiarowość); logika wielowartościowa zaś powstała teoretycznie na skutek zanegowania zasady dwuwartościowości, jako logika, w pewnym sensie, nie-Arystotelesowa. Niezależnie od takich czy innych spekulacji *ex post*, rewolucja w geometrii mogła być przynajmniej bodźcem heurystycznym dla idei wielowartościowości w logice. Inna dyscyplina leżąca u źródeł i podstaw logiki wielowartościowej, to teoria prawdopodobieństwa.

Osobna kwestia to prowielowartościowe wsparcie ze strony nauk nieformalnych. Za wielowartościowością mają przemawiać pewne sytuacje nieokreśloności i quasi-względności znane w fizyce współczesnej: zjawisko nieoznaczoności z mikrofizyki i komplementarności z optyki. Wielowartościowcy starają się do nich dostosować systemy logiczne. Do tego dochodzą klasyczne już sprawy wiążące się z wielowartościowością: indeterminizm, zdarzenia przyszłe i różnego typu sytuacje wyrażane modalnie³.

Postawa dwuwartościowców nie jest nastawiona na modyfikowanie logiki czy wielość systemów logicznych. Są skłonni uznać za G.W. Leibnizem za prawa (reguły) logiki tylko te, które dotyczą wszelkich sytuacji, „wszel-

³ Uwagi te są nader niepełne wobec licznych wielowartościowych systemów o innej genezie: S1-S5 implikacji ściślej (C.I. Lewisa), intuicjonistycznych (A. Heytinga), dyskusyjno-dialogicznych (jak S. Jaśkowski), dialektycznych (R. Rogowskiego i in.), deontycznych (J. Kalinowskiego) i in.

kich możliwych światów” zastosowań. Trudnościami aplikacji logiki do różnych dziedzin obarczają jej klientów, proponując zarazem dostosować dziedziny zastosowań logiki do jej — w zasadzie klasycznych — wymagań. Ujęcia ponaddwuwartościowe wzbogacają logiczny punkt widzenia, to prawda. Z drugiej jednak strony, pewnego typu — powiedzmy nie tyle skrajną, ile zasadniczą — dwuwartościowość logiki, systemów logicznych preferować by należało przynajmniej ze względu na respektowanie w nauce zasady maksymalnej prostoty i ekonomii jej podstaw, a co za tym idzie — redukcji ujęć złożonych do tego, co (naj)prostsze. A więc — redukcji ujęć wielowartościowych do niewielowartościowych; tych ostatnich jako — faktu naukowego — zanegować niepodobna. Idea prostoty i redukcji sprawia że:

Jest jakiś wariant (iii) bliski (i) u podstaw niniejszego szkicu, w którym interesujemy się przede wszystkim tym, o ile i w jaki sposób zachowane są w szeroko pojętej logice formalnej (zdań) założenia tak czy inaczej rozumianej dwuwartościowości zasadniczo bezkonfliktowo, a więc także dla logiki skądinąd „niedwuwartościowej” (I,5).

Na dalszy ciąg rozważań złożą się jeszcze następujące uwagi: najpierw głównie dotyczące tak zwanej zasady dwuwartościowości, jej obowiązywalności i spraw z tym związanych (II), z kolei dotyczące dwuwartościowości — powiedzmy: „reduktywnej” — pewnych wielowartościowych systemów logicznych (III), wreszcie refleksje specjalne wskazujące na pewną dość oczywistą „jednowartościowość”, a nawet „niewartościowość” logiki, którą przyjęto nazywać dwuwartościową oraz pewne uwagi końcowe (IV).

(II) Omawianą tu problematykę wiąże się zwykle z (metalogiczną) zasadą dwuwartościowości lub jej odpowiednikami dla rachunków wielowartościowych. Nawiązując do Arystotelesa i stoików pierwszy zasadę tę sformułował współcześnie i teoretycznie docenił Jan Łukasiewicz, który jednocześnie był jej znakomitą krytyką, przede wszystkim jako twórcą logiki trójwartościowej.

Oto metalogiczno-ontologizujące, nazwijmy je tak roboczo, sformułowanie tej zasady ze stosunkowo mało znanej i słabo wykorzystywanej pracy *Logika dwuwartościowa* (z r. 1920)⁴:

Istnieją dwie i tylko dwie wartości logiczne, mianowicie prawda i fałsz (II,1). Posługiwał się zwykle Łukasiewicz innym sformułowaniem zasady dwuwartościowości, pochodzącym jeszcze od starożytnych a znanym dziś jako obiegowe właśnie dzięki Łukasiewiczowi:

⁴ „Przegląd Filozoficzny” 23: 1921 s. 189-201; por. s. 190.

Każde zdanie jest bądź prawdziwe, bądź fałszywe (II,2). Inaczej mówiąc: Dla dowolnego zdania Z : albo Z jest prawdziwe, albo Z jest fałszywe (II,3).

Ciekawie i inaczej (pozornie tylko archaicznie) ujmuję Łukasiewicz opozycję prawda — fałsz zdań we wspomnianym artykule. Wyodrębnił tam mianowicie dwie „naczelne zasady logiki dwuwartościowej”:

Uznaję prawdę (II,4), czyli:

U : 1 (II,5)

Odrzucam fałsz (II,6), czyli:

N : 0 (II,7)⁵. Zasady (II,4) i (II,5) wyrażają, jak to dziś rozumiemy, pragmatyczno-logiczną postawę pozytywną wobec zdania prawdziwego, postawę preferowania, uznania wartości logicznej (ogólniej: logiczno-semantycznej) prawdy; podobnie (II,6) i (II,7) wypowiadają postawę negatywną wobec zdania fałszywego, wobec wartości logicznej fałszu, którą się „dyspreferuje”, „dyskwalifikuje”, odrzuca.

Razem zasady te odpowiadają zasadzie dwuwartościowości w poprzednich sformułowaniach, stanowią ich pewne pragmatyczno-semantyczne uzupełnienie. Łącznie stanowią postulat paralelizmu semantyczno-pragmatycznego w zakresie logiki. Postulat to ważny, gdyż oprócz postawy uznawania i odrzucania zdania ze względu na jego wartość logiczną odróżnia się inne, w tym postawę powstrzymywania się od uznawania i odrzucania zdania. Łukasiewicz mówi w wymienionym artykule, że tę trzecią postawę zajmujemy wówczas, gdy nie wiemy, czy zdanie jest prawdą lub fałszem⁶. Wprowadzony pod wpływem idei Fregego znak U a w duchu Brentany znak N , to odpowiednik używanych później przez J. Łukasiewicza znaków $\vdash$ i $\dashv$ za *Principiami* rozumianych metajęzykowo⁷.

Rola wartości logicznych w logice nie jest, jak to już podkreślono, należycie zreflektowana (meta)teoretycznie. Ówczesne uwagi Łukasiewicza z 1920 r. to raczej wyjątek (poza dawniejszymi jeszcze Fregego, nie liczymy autorów pozostających jawnie pod wpływem psychologizmu). Być może utrudniają refleksje zróżnicowane koncepcje co do natury logiki, w swej istocie filozoficzne, albo i w ogóle rezygnacja z tego typu rozważań,

⁵ Tamże s. 191.

⁶ Tamże s. 191-192. Pragmatyka każe wyróżnić sytuacje: uznawania zdań fałszywych, odrzucania prawdziwych oraz „ani uznawania, ani odrzucania” (np. gdy tylko rozumiemy zdanie). Istnieje tu pewna analogia do metalogicznego problemu relacji zbioru tez do zbioru tautologii. Mówiąc tu „postawy” parafrazujemy Łukasiewicza „sposoby zachowania się wobec wartości logicznych” (tamże s. 190 n.).

⁷ Tamże s. 189.

w ujęciu logiki radykalnie instrumentalnym, a zwłaszcza formalnym. Łukasiewicz nie wracał już chyba nigdy do tego typu problematyki uważając zapewne sformułowania w rodzaju (II,4) — (II,7) za zbyt psychologizujące („sposoby zachowania się wobec wartości logicznych”) i ontologizujące (za Fregem zdania oznaczają przedmioty: prawdę lub fałsz). Przejęty był bowiem — mniej lub bardziej, zależnie od czasu — antypsychologizmem i był ostrożny na linii logika — filozofia. Tymczasem jednak, wtedy uznawanie i odrzucanie uważał — obok wstrzymywania się (wiązało się z jakimś nie kontynuowanym zamysłem „psychologizującej” interpretacji logiki wielowartościowej?) — za zasadnicze „sposoby zachowania się wobec wartości logicznych”. Podkreślmy na końcu zadziwiającą nowoczesność tych porzuconych potem sformułowań („zachowanie się”). Nawet sformułowanie zasad w pierwszej osobie może być uznane za psychologizujące (przypomina ponadto *cogito* i performatywy).

Po tej — ważnej — dygresji, trochę historycznej, wróćmy do pierwszej i drugiego sformułowania zasady dwuwartościowości. Najpierw relacja między nimi. Sprawa wyglądać może dwojako. Po pierwsze, zasadę (II,1) można potraktować jako bliskoznacznik lub równoważnik (II,2), oczywiście, przy pewnych założeniach — gdy zaniedba się różnice stylizacyjne, a przede wszystkim gdy potraktuje się (II,1) jako wyrażenie eliptyczne, dorównane znaczeniowo do (II,2), rzecz jasna, po odpowiednim dopełnieniu. Po drugie, zasadę (II,1) można rozumieć dosłownie; wtedy wydaje się ogólniejsza niż (II,2) — o ile to, że są dwie wartości (domyślnie zdań — tego minimalnego elementu dopełnienia nie tracimy z pola widzenia) nie przesądza tego, jaki jest między nimi stosunek. W tej drugiej interpretacji mielibyśmy już do czynienia z jakimś uogólnieniem lub osłabieniem zasady dwuwartościowości.

Istnieją pewne równoważniki lub bliskoznaczniki, w tym uogólnienia, osłabienia, sformułowania cząstkowe zasady dwuwartościowości. Przede wszystkim, (II,2) i (II,3) są bliskie tzw. ostremu (właściwemu) prawu wyłączonego środka, które nazywa się czasem (systemowym) prawem dwuwartościowości klasycznego rachunku zdań:

$p \vee \sim p$ (II,8), gdzie funktor główny stanowi alternatywę rozłączną. Dokładniej jednak mówiąc, właściwym odpowiednikiem (II,2) lub (II,3) jest odpowiednik metalogiczny prawa (II,8), czyli:

Dla dowolnego zdania Z : albo Z jest prawdziwe, albo $^1\sim Z^1$ jest prawdziwe (II,9), gdzie „albo ... albo ...” jest potocznym odczytaniem funktora alternatywy rozłącznej a $^1...^1$ to quasi-cudzysłowy. Zasada dwuwartościowości (II,3) — że posłużymy się już tylko tym wariantem — jest

równoważna z (II,9) na gruncie następującego metaprawa o związku między wartością logiczną (prawdziwością) zdania i jego negacji:

' $\sim Z$ ' jest prawdziwe $\equiv$ Z jest fałszywe (II,10). Odnotujemy jeszcze równoważności:

Z jest fałszywe $\equiv$ Z nie jest prawdziwe (II,11),

Z nie jest prawdziwe $\equiv$ Z jest nie-prawdziwe (II,12),

Z jest nie-prawdziwe $\equiv \sim(Z \text{ jest prawdziwe})$ (II,13).

Wnioski narzucają się na podstawie przechodniości równoważności i dualności terminów: prawdziwy, fałszywy. Rzecz jasna (II,8) stanowi przy tym koniunkcję prawa niesprzeczności klasycznego rachunku zdań: $\sim(p \wedge \sim p)$ (II,14) oraz „zwykłego” prawa wyłączonego środka tegoż rachunku:

$p \vee \sim p$ (II,15). Analogicznie (II,9), jako metalogiczny odpowiednik (II,8) jest równoważny koniunkcji metalogicznych odpowiedników (II,14) i (II,15), czego dla oszczędności już nie zapisujemy⁸.

Z drugiej strony, metatezę (II,2) lub (II,3) zinterpretować można jako „podziałowe” zdanie analityczne, stwierdzające podział zdań ze względu na przyjęte podstawowe wartości logiczne (albo odpowiednio — podział wartości logicznych zdań). Jest to podział binarny, dychotomiczny o cechach adekwatności i rozłączności zapewnionych w sposób stricte logiczny. Wspomniane zdanie podziałowe to:

Zbiór zdań dzieli się na podzbiór zdań prawdziwych i podzbiór zdań fałszywych (II,16); pozostawmy dla uproszczenia przy tym tylko sformułowaniu, choć można je przekształcać jak podane wyżej sformułowania oraz uogólniać.

Zdanie (II,16) stanowi koniunkcję z (meta)zasad:

Zbiory: zdań prawdziwych i zdań fałszywych wykluczają się (II,16.1);

Zbiory: zdań prawdziwych i zdań fałszywych dają sumarycznie zbiór zdań (II,16.2) — czyli zbiory: zdań prawdziwych i zdań fałszywych dają w rezultacie zbiór zdań (II,16) — a więc stanowi warunki rozłączności i adekwatności podziału zdań ze względu na ich podstawowe wartości logiczne⁹.

Zauważmy, że (II,16.1), czyli warunkowi rozłączności odpowiada (meta)zasada niesprzeczności a (II,16.2), czyli warunkowi adekwatności — (me-

⁸ Ciekawe uwagi na temat: zasada dwuwartościowości — tzw. naczelne prawa logiki (tradycyjnej) znajdujemy u A. Zinowiewa (*Filozoficzne problemy logiki wielowartościowej*, Warszawa 1963).

⁹ Matrycowe konstrukcje od strony podziału zdań ze względu na ich wartości omawia R. Suszko (*Formalna teoria wartości logicznych I*, „Studia Logica” 6:1957 s. 145-237). Autor stwierdza, że podział zdań na prawdziwe i fałszywe nie wyklucza innych podziałów i związanych z nimi macierzy (s. 147).

ta)zasada wyłączonego środka (II,17). Uniwersum przy tym zredukowane jest tutaj do zdaniowego *totum divisionis*. Ta odpowiedniość między podziałem logicznym, jego formalnymi własnościami i tzw. najwyższymi prawami logiki tradycyjnej jest interesująca sama w sobie. Tutaj jednak jedno jest ważne: „załatwiają” one w logice to samo, co czyni zasada dwuwartościowości z jednej strony a warunki poprawnego podziału zastosowane do problemu podziału zdań ze względu na ich wartości — z drugiej. Dołóżmy jeszcze i to, że tę samą własność gwarantuje logice przyjęte u jej podstaw, na jej użytek obiegowe określenie zdania (a raczej warunek konieczny bycia zdaniem):

Zdanie jest to wyrażenie, które jest prawdziwe albo fałszywe (II,18)¹⁰.

Wymienione wyżej sformułowania (II,1) — (II,18) można precyzować, modyfikować, uogólniać i zacieśniać. Na przykład zamiast mówić o zdaniu prawdziwym i fałszywym (nie-prawdziwym), można mówić o zdaniu o takiej a takiej wartości logicznej, powiadając na przykład:

Każde zdanie ma taką to a taką wartość logiczną, albo ma nie-taką to a taką wartość logiczną (II,19). Odnotujmy nadto i inne sformułowania: Dla dowolnego zdania Z : istnieje jakaś wartość logiczna w_i zdania Z z przyjętego w systemie zdań zbioru wartości $w_1, \dots, w_n$ (możliwy jest tu zbiór nieskończony wartości) (II,20). Metatezę (II,20) można nazwać zasadą wartościowania. Jej inna postać to:

Dla dowolnego zdania Z : istnieje dokładnie jedna wartość w_i zdania Z z przyjętego w systemie S zbioru wartości $w_1, \dots, w_n$ (nie wykluczony jest zbiór nieskończony) (II,21). Bliższa wszakże uogólnieniu zasady dwuwartościowości wydaje się metateza:

Każde zdanie Z albo ma jakąś (jedną) wartość w_i z przyjętego w S zbioru wartości $w_1, \dots, w_n$ (ich zbiór może być nieskończony), albo Z nie ma wartości w_i (II,22). Dokładniejsze w tym względzie przybliżenie daje metateza następująca:

Dla każdego Z : albo istnieje przyporządkowana Z wartość w_i z przyjętego w systemie zbioru wartości $w_1, \dots, w_n$ (zbiór ten może być nieskończony), albo istnieje wartość w_j zdania Z , gdzie $j \neq i$ (II,23)¹¹.

Podkreślić należy, że można dysponować w systemie dwiema tylko wartościami logicznymi, charakteryzowanymi jedynie formalnie, to jest bez merytorycznej interpretacji binarności, daje to także jakieś poszerzenie rozumienia zasady dwuwartościowości, choć bardzo słabe. Jest to ważne o tyle, o ile jakościowy charakter wartości logicznych nie należy do do-

¹⁰ Jeśli określić zdanie pragmatycznie jako pozytywne lub negatywne stwierdzenie, to można mówić także o pragmatycznych wartościach zdań.

¹¹ Por. uwagi Reschera i Zinowiewa w tym względzie.

meny logiki. Brzmi to pozornie paradoksalnie. Logika formalna treścią charakterystykę wartości logicznych przyjmuje z semiotyki (semantyki) lub teorii poznania, formułując prawa o związkach między wartościami logicznymi odpowiednich wyrażeń. To co się nazywa wartościami logicznymi (zdań) można więc zaliczyć, biorąc pod uwagę ich sens intuicyjny, do wartości epistemologicznych lub semiotycznych wyrażeń zdaniowych. Można by godzić prawa logiki, w szczególności logiki zdań z różnymi koncepcjami podstawowych wartości zdań. Wiele wskazuje na to, że logika formalna z zewnątrz przejmuje tezę o prawdziwościowym charakterze wartości zdań, o prawdzie i fałszu jako podstawowych wartościach zdań. Niektórzy uważają, że prawa logiki formalnej — z logiką zdań na czele — dają się uzgodnić z różnymi koncepcjami prawdy. Jednak jest faktem, że przyjęta powszechnie w metodologii nauki semantyczna definicja prawdy stanowi pewne sformułowanie odpowiadające klasycznej koncepcji prawdy.

To co powiedziano wyżej o formalnym oraz intuicyjnym, w tym głównie prawdziwościowym charakterze dwu podstawowych wartości logicznych daje się odnieść, acz nie bez sporych trudności, do wartości logicznych w ogóle. Interpretacja wartości logicznych, jak zresztą i ich liczba, wiąże się z rozumieniem i liczbą funktorów logiki zdań, w szczególności jednoargumentowych. Widoczne to było u Łukasiewicza, który w Ł3 (tak oznaczamy jego logikę trójwartościową) przyjmował trzecią wartość zdań, a więc $1/2$, jako możliwość, a z drugiej strony interpretowany możliwościowo funktor Mp . Sygnalizujemy tu tylko ten ciekawy problem¹².

Na zakończenie tego wątku kilka uwag na temat rozumienia wartości logicznych i spraw z tym związanych. W semiotyce elementarnej i dydaktyce logiki wyrazy „prawda”, „fałsz” lub pochodne traktuje się dla uniknięcia zarzutu hipostazowania jako skrótów wyrażeń: „zdanie prawdziwe”, „zdanie fałszywe”. Przy takim ujęciu prawdziwość i fałszywość stanowią pewne cechy relatywne zdań, traktowane jako ich własności semantyczne. Niekiedy zamiast o własnościach zdań mówi się o klasach zdań. Natomiast przy ujęciu matrycowym wartości oznaczone jako 1, 0 są elementami matrycy przyporządkowanymi wyrażeniom zdaniowym przez pewne funkcje zwane wartościowaniami. Tyle o metajęzykowych sposobach użycia wyrażeń prawda, fałsz lub symboli 1, 0.

Oprócz tego należy odróżnić zastosowanie symboli 1, 0 dla oznaczenia pewnych stałych systemów logiki zdań, mianowicie stałego zdania praw-

¹² Por. J. Łukasiewicz. *O wielowartościowych systemach rachunku zdań*. W: *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*. Warszawa 1961 s. 144-163, a zwłaszcza s. 143 n., 153.

dziwego 1 i stałego zdania fałszywego 0. Tylko przy takim sposobie użycia wymienionych symboli wolno mówić w sensie ścisłym o podstawianiu stałych 1 lub 0 za zmienne zdaniowo $p_1, \dots, p_n$. Podobnie funkcjonują, zamiast wyrażeń $p/1$, $p/0$ stosowane w praktyce logicznej, choć nie preferowane teoretycznie, zapisy w rodzaju: $p=1$, $p=0$. Natomiast w poprzednio wymienionych przypadkach dopuszczalne jest jedynie przyporządkowanie wartości zdań jako ich własności relatywnych, klas lub wartości matrycowych wyrażeniom o charakterze zdaniowym.

Niestety w niektórych ujęciach miesza się wyszczególnione wyżej sposoby rozumienia i użycia wartości logicznych. Dla uniknięcia nieporozumień należałoby ich stosowanie wyraźnie zróżnicować kontekstowo lub przyjmując dla nich odmienne symbole. Problematyka ta wchodzi poniekąd w samą filozofię logiki (zdań). Jak ją, a więc jej zmienne i ich wartości, rozumieć — językowo, zdarzeniowo, czy metajęzykowo, czy jeszcze jakoś inaczej? Na szczęście tego typu kwestie nie mają bezpośredniego wpływu na samo funkcjonowanie rachunków logicznych.

(III) Problematyka tytułowa posiada pewne nie uwzględnione dotąd aspekty. Zwrócenie na nie uwagi pozwoli doświetlić niektóre bardziej szczegółowe sprawy i dzięki temu usunąć pewne nieporozumienia.

Najpierw konstrukcja matrycowa logiki wielowartościowej z uwzględnieniem matrycy dwuwartościowej. Otóż, dzieje się tak właśnie w systemach Łukasiewiczowskich, gdzie:

Zachowane zostają stare klasyczne wartościowania w Ł-systemach (tak określamy systemy Łukasiewicza), dołączają się tylko do nich przyporządkowania wartości związane z wprowadzeniem wartości nowych, pozaklasycznych; tak tedy stara matryca M_K (klasyczna) danego funktora (funkcji) F pozostaje stając się częścią właściwą matrycy nowej M_L (III,1).

Dzięki takiemu założeniu semantycznemu w swych wielowartościowych systemach mógł ich autor posługiwać się dotychczasowymi symbolami funktorów i zapewnić — przynajmniej z dokładnością do tej części wspólnej jaką stanowiła M_K — ciągłość sensu stałych klasycznych i nieklasycznych (wielowartościowych), co daje tym samym podstawę do międzysystemowych ujęć komparatywnych (III,2). Zasadę wyrażoną w (III,2) i odpowiednio uogólnioną nazwać można Łukasiewiczowskim postulatem zachowania K-wartościowań funktorów w n-wartościowych NK-konstrukcjach matrycowych.

Wobec (III,1) i (III,2), klasyczne formuły logiki obowiązują nadal w branych tu pod uwagę Ł-systemach. Dokładniej rzecz biorąc: Wszystkie logiczne K-formuły, czyli klasyczne, w tym K_L — na przy-

kład K_L^{CN} — są w dalszym ciągu ważne w omawianego typu NK_L -wielowartościowych konstrukcjach, formułach będących odpowiednikami K (K_L), w zakresie dokładnie odpowiadającym K (K_L)-wartościowaniom par argumentów i funkcji (III,3). Inaczej i prościej mówiąc:

Wszystkie formuły typu NK_L są spełnione w zakresie odpowiadającym wartościowaniom ich klasycznych — K (K_L)-odpowiedników (III,4).

To co powiedziano ilustrują tabele: dla funktorów unarnych; gdzie

N i C to znaki negacji i implikacji (w oryginalnej notacji Łukasiewicza), sens innych oznaczeń daje tu w zasadzie kontekst; oraz dla

klasy wartości.	$W(p)$	$Wf(p)$	typy wartości.	egzempl. z $\mathbb{L}_3$ dla Np
k_1^1	K	K	K	$N1 \ N0$
k_2^1	K	NK	NK	0 1
k_3^1	NK	K	NK	$N\frac{1}{2}$
k_4^1	NK	NK	NK	$\frac{1}{2}$

(III,5),

funktorów dwuargumentowych tabela (oznaczenia analogiczne):

klasy wartości.	$W(p)$	$W(q)$	$Wf(p,q)$	typy wartości.	egzempl. z $\mathbb{L}_3$ dla Cpq
k_1^2	K	K	K	K	$C11 \ C10 \ C01 \ C00$ 1 0 1 1
k_2^2	K	NK	K	NK	$C0\frac{1}{2}$ 1
k_3^2	NK	K	K	NK	$C\frac{1}{2}1$ 1
k_4^2	NK	NK	K	NK	$C\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ 1
k_5^2	K	K	NK	NK	$C1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
k_6^2	K	NK	NK	NK	
k_7^2	NK	K	NK	NK	$C\frac{1}{2}0$ $\frac{1}{2}$
k_8^2	NK	NK	NK	NK	

(III,6).

Tabele (III,5) i (III,6) suponują proste określenie:

Wartościowanie jest klasyczne $\equiv$ odpowiednie wartości wyrażen złożonych (funkcji) oraz wszystkich argumentów tychże wyrażeń są klasyczne (III,7). W pozostałych przypadkach — w naszych tabelach: $k_2^1 \rightarrow k_4^1$ oraz $k_2^2 \rightarrow k_8^2$ — mamy do czynienia z różnego typu NK — wartościowaniami. Wskazane klasy wartościowań można ująć w hierarchię klasyfikacyjną nadając poszczególnym jej elementom odpowiednie nazwy. Dodajmy jeszcze, że nie wszystkim wyodrębnionym k_j^i -klasom dają się przypisać odpowiednie przykłady wziętego tu pod uwagę systemu Ł3.

Fakty tu zasygnalizowane byłyby lepiej uwidocznione i budziłyby mniej nieporozumień, gdyby pisać jakieś indeksy-„kwantyfikatory” przy odnośnych wzorach, na przykład tak:

$(p \vee \sim p)_K$ (III,8). Można by w tymże celu użyć też kwantyfikatorów wiążących zmienne (wartościowościowe):

$\bigwedge_{w(p) \in K} (p \vee \sim p)$ zdaniowe (III,9), gdzie $w(p)$ to wartość zdania p . Formuły (III,8) i (III,9) są więc nadal ważne w zakresie identycznym z dotychczasowym. Jeśli dojdą tu nowe możliwości wartościowań, to nie przekreśli to starych, podobnie jak one nie przekreślają nowych. Prawo (ostre) wyłączonego środka dla wartościowań nieklasycznych wyglądałoby na przykład tak:

$(p \vee \sim p)_{NK}$ (III,10). Wzór zaś pretendujący (podkreślamy to) do ogólnej ważności pisany byłby bez wskaźników:

$p \vee \sim p$ (III,11), czyli (II,8), lub też ze wskaźnikiem K, NK :

$(p \vee \sim p)_{K, NK}$ (III,12), gdyż:

$(p \vee \sim p)_{K, NK}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(p \vee \sim p)_K$ i $(p \vee \sim p)_{NK}$ (III,13).

Gdyby o tym wszystkim pamiętać, fenomen logiki wielowartościowej wyglądałby może mniej sensacyjnie.

Co wszakże dalej ze spełnialnością formuł wielowartościowych, przynajmniej w logikach typu Ł3 i w sytuacjach wartościowania NK lub K, NK ? I tutaj nie jest tak, jak się to czasem sugeruje lub obiegowo powtarza. W każdym razie, jeśli próbuje się dezabsolutyzować (nazwijmy to tak z braku lepszego terminu) przyjęte klasycznie wartościowania formuł, nie można — tym samym — absolutyzować wartościowań nowych, zresztą w pewnym zakresie dość dowolnych. Trudno tu bowiem o stanowczy wybór kryteriów. Wolno więc starać się dostosować wartościowania typu NK do K -wartościowań, tzn. dobrać je tak, by ogólnie ważne — K, NK — były odpowiednie formuły, np. prawo wyłączonego środka i niesprzeczności, a tym samym systemowy odpowiednik zasady dwuwartościowości, czyli ostre prawo wyłączonego środka (III,14).

Jest to możliwe, przynajmniej dla pewnych systemów wielowartości-

ciowych, i to zdawałoby się tak niewdzięcznych, jak Ł3. Był on bowiem konstruowany przez Łukasiewicza matrycowo jakby specjalnie po to, aby podważyć tzw. najwyższe prawa logiki (tradycyjnej). Realizuje się w pewnym zakresie (III,14) zachowując w szczególności starą i bardzo naturalną definicję:

$p \vee q = \text{df } \sim p \rightarrow q$ (III,15), którą Łukasiewicz odrzucił zastępując ją tylko implikacyjnym, lecz dłuższym odpowiednikiem ważnym także w logice dwuwartościowej¹³;

$p \vee q = \text{df } (p \rightarrow q) \rightarrow q$ (III,16). Twórca Ł3 wolał to zrobić niż zmienić prowadzące do odrzucenia (III,15) wartościowania:

$$W(\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \text{ (III,17),}$$

$$W(\sim \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \text{ (III,18), a tym samym:}$$

$$W(\sim \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \text{ (III,19),}$$

$W(\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}) = 1$ (III,20). Podobnie ze względu na (III,17) i (III,19) odrzucił prawo wyłączonego środka, które dla $p/\frac{1}{2}$ ma wartość $\frac{1}{2}$, z powodu zaś (III,19) oraz ze względu na $W(\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ przestało — jak się powiada — obowiązywać dla K, NK prawo niesprzeczności, które przy $p/\frac{1}{2}$ przechodzi w $\frac{1}{2}$.

Tymczasem przy zmienionym wartościowaniu:

$W(\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}) = 1$ (III,21) zachowuje się w krytycznym podstawieniu (zwykle) prawo wyłączonego środka, gdyż:

$$W(\frac{1}{2} \vee \sim \frac{1}{2}) = W(\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}) = 1 \text{ (III,22), i podobnie — prawo niesprzeczności, gdyż:}$$

$$W[\sim(\frac{1}{2} \wedge \sim \frac{1}{2})] = W[\sim(\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2})] = W(\sim 0) = 1 \text{ (III,23), oczywiście przy założeniu:}$$

$p \wedge q = \text{df } \sim(\sim p \vee \sim q)$ (III,24). Jak widać, systemowy odpowiednik zasady dwuwartościowości, prawo ostre wyłączonego środka zachowuje się w tak zmodyfikowanym Ł3 jako koniunkcja praw wyłączonego środka i prawa niesprzeczności. Przyjęte wartościowania funktorów wydają się intuicyjne — zwłaszcza (III,21) — i nie dają rażących konsekwencji w zakresie nas tu obchodzącym, choć na pewno nie są jedynie możliwe do zaakceptowania¹⁴.

System logiczny może być, jak wiadomo, zadany „syntaktycznie”, jako

¹³ Tamże s. 154 przyp. 14. K. Ajdukiewicz wyjaśniając tzw. paradoksy klasycznej implikacji materialnej oparł się właśnie o jej definicję przez alternatywę i negację, gdyż klasyczny sens alternatywy uznał za nader intuicyjny — *Okres warunkowy a implikacja materialna*. W: *Wybór pism*. T. 2. Warszawa 1965 s. 249 n.

¹⁴ Inny wariant wartościowań zachowujących $p \vee \sim p$ i $\sim(p \wedge \sim p)$ podaje J.M. Bocheński (*La vraie logique*. W: *La vérité. Actes du XII^e Congrès des Sociétés de Philosophie de Langue française. Bruxelles—Louvain 22-24 août 1964*. Louvain—Paris 1965 s. 69-83, 77-78). Zob. też A.N. Prior. *Formal Logic*. Oxford 1962 s. 243 (w przyp. 1 odwołuje się do swojego artykułu *Three-valued Logic and Future Contingents* z „*Philosophical Quarterly*” 3:1953 s. 317-328).

aksjomatyczny bądź założeniowy rachunek, lub scharakteryzowany „semantycznie”, matrycowo — dwu lub więcej wartościowo. Optymalnie oba typy ujęć pokrywają się. Mówi się wtedy, że system czy rachunek posiada matrycę adekwatną, określoną z grubsza tak ¹⁵:

Matryca M jest adekwatna względem rachunku R o aksjomatach A i dyrektywach $D \equiv$ zbiór tez T stanowiących konsekwencje systemu $\langle A, D \rangle$ jest identyczny ze zbiorem wyrażeń spełnionych w M , czy zbiorem $E(M)$ (III,25). Określa się funkcjonalną, czyli definicyjną pełność takiego systemu (rachunku):

Rachunek R o aksjomatach A dyrektywach D jest definicyjnie pełny $\equiv$ minimalna matryca adekwatna jest dla R funkcjonalnie pełna (III,26). Mówiąc prościej, dowolna zadana matrycowo funkcja systemu (rachunku) jest definiowalna przez funkcje zbudowane z innych terminów niż dana, w ostateczności z terminów pierwotnych, tak właśnie określonych matrycowo, by definiowały wszystkie inne.

Systemy istotnie wielowartościowe nie mają — jako całość — dwuwartościowej matrycy adekwatnej i na tym polega ich zasadnicza wielowartościowość (III,27). Tak jest np. z wielowartościowością L_3 .

Można jednak wyodrębnić część takiego systemu, dla którego istnieje matryca adekwatna dwuwartościowa i w tym sensie jest on — częściowo — dwuwartościowy (III,28). Dobrze jest, jeśli istnieje metoda przeprowadzenia takiego wyodrębnienia, np. odpowiedni podział aksjomatów. Dla rachunku trójwartościowego funkcjonalnie pełnego zrobił to J. Śłupecki ¹⁶.

Mocniej honorują dwuwartościowość — powiedzmy tak prowizorycznie — systemy wielowartościowe tej klasy co L_4 (tak sygnujemy rachunek czterowartościowy, tzw. L -modalny J. Łukasiewicza); jest to system otrzymany z dwuwartościowego mnożeniem matryc dwuwartościowych metodą S. Jaśkowskiego; dlatego nazwiemy go wielowartościowym, ale dwuwartościowo-pochodnym, generowanym binarnie (III,29). Nie miejsce tu na opis ogólny tej metody (pomijamy tu całkowicie inną metodę Jaśkowskiego — konstrukcji matryc $n+1$ -wartościowych na podstawie n -wartościowych) ¹⁷.

¹⁵ Dokładniejsze określenia tego i innych wchodzących w grę logicznoformalnych pojęć zawiera literatura przedmiotu. Zob. np. J. Pogorzelski. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*. Wyd. 2. Warszawa 1973; R. Wójcicki. *Matrix Approach in Methodology of Sentential Calculi*. "Studia Logica" 32:1973 s. 7-37; pracę R. Suszki już wspomniano w przyp. 9.

¹⁶ *Pełny trójwartościowy rachunek zdań*. Lublin 1946 (odb. z „Annales Univ. M. Curie-Skłodowska” s. 200 n.; chodzi o rachunek R , w którym zachowane są odnośne prawa klasyczne.

¹⁷ Zob. Zinowiew. *Filozoficzne problemy* s. 40-47.

Najprościej zresztą ująć — w sposób zasadniczo równoważny — sens i genezę takiej logiki czterowartościowej interpretując cztery funktory jednoargumentowe logiki klasycznej, dokładniej zaś odpowiadające im uporządkowane pary utworzone z podstawowych wartości 1 i 0: (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0) jako cztery nowe wartości — oznaczone odpowiednio (np. przy pomocy liczb: 1, 2, 3, 4) — logiki czterowartościowej (III,30). Sprawdzanie wyrażeń $\wedge$ (formuł) zdaniowych złożonych tego rachunku jest — podkreślmy to — ostatecznie sprowadzalne do operacji na dwu wartościach logicznych wziętych z odpowiednich par podstawowych wartości klasycznych (III,31).

W L4 obowiązują wszystkie tezy klasycznego rachunku zdań (III,32). Inne tezy dają się sprawdzić w najdalszej instancji w oparciu o matryce klasyczne, właśnie ze względu na binarną konstrukcję wartości tej logiki (III,33). Czteroelementowy zbiór wartości, powiedzmy (1, 2, 3, 4), dzieli się na podzbiór dwu wartości „skrajnych”: (1, 4) oraz podzbiór dwu wartości „środkowych”: (2, 3). Wartości z każdego z tych podzbiorów są względem siebie w analogicznej opozycji formalnej, takiej zresztą jak opozycja binarna wartości wyjściowych, podstawowych: 1—0. Gdyby trzymać się intuicji prawdziwościowych, to można by tu — choć rzecz to dyskusyjna — dopatrzeć się jakby dwu gatunków zdań prawdziwych i dwu gatunków fałszywych¹⁸.

Formalnie rzecz biorąc, wszystkie takie — cztero, ośmio, szesnasto itd. -wartościowe — systemy są spełnione przez minimalną dwuwartościową matrycę adekwatną; bezpośrednio w przypadku wzorów równo kształtnych z klasycznymi, a pośrednio tylko na zasadzie wspomnianego generowania dla podzbioru formuł zawierających nowe stałe logiczne (III,34). Stąd można mówić, że są to z pewnego punktu widzenia rachunki wielowartościowe nieistotnie, bardziej — jeśli wolno stopniować — dwu niż więcej wartościowe (III,35).

Interesujący, do szczegółowego zbadania, jest tu związek pomiędzy L4 a L3 (lub ich uogólnieniami)¹⁹. Pomijamy tu — i wyżej — ten aspekt wielowartościowych — skądinąd — rachunków, który polega na tym, że po skreśleniu nowych, wyznaczonych nowymi wartościowaniami funktorów modalnych (ewentualnie zastąpieniu ich odpowiednimi funktorami klasycznymi) otrzymuje się z tautologii danego systemu tautologie systemu klasycznego²⁰.

¹⁸ Na przykład prawdziwych koniecznych i prawdziwych kontyngentnych oraz analogicznych fałszywych.

¹⁹ Por. w związku z tym: Bocheński, jw. s. 80-81.

²⁰ Pominęto tu pewien aspekt dwuwartościowości systemów S1-S5, w których zachowane są odpowiednie prawa logiki klasycznej (por. s. 45 przyp. 3).

(IV) Podsumowując uwagi dotychczasowe możemy powiedzieć, że: Nie ma w istocie zasadniczego antagonizmu między, tak czy inaczej rozumianymi formalnie i interpretowanymi treściowo, systemami wielowartościowymi a logiką dwuwartościową; tak przynajmniej sprawę tę można postawić i zrozumieć (IV,1). Za podstawową zaś rolę dwuwartościowości w tym — uzgodnionym w zasadzie układzie — przemawia wiele. Zwłaszcza to, że gdzieś — u podstaw lub na jakimś poziomie meta-refleksji, do którego się ostatecznie odnosimy, myślimy najprościej, binarnie. Tak jest zapewne w poznaniu potocznym (niech zresztą rozstrzygają to znawcy — psychologowie i gnozeologowie), które jest przecież prazródłem, prazbiorowiskiem i ostatecznie poznawczym odniesieniem wszystkich typów wiedzy.

W tej końcowej części warto posunąć podjęty tu tok myślowy jeszcze dalej. Spróbujmy najpierw postawić wyraźnie i wyeksplikować tezę, której treść przewijała się w toku dotychczasowych rozważań:

Obie podstawowe wartości zwane logicznymi, przyjmowane w logice, tj. prawda i fałsz (przyjmujemy tę interpretację klasyczną, choć uwagi te mogą mieć sens nieco ogólniejszy) nie są w stosunku do siebie równorzędne; pierwotna jest prawda, prawdziwość, zdanie prawdziwe (IV,2).

W rzeczy samej, praktyka logiczna, zastosowania logiki i pewne (meta) wypowiedzi o niej wskazują na (IV,2) — przynajmniej śladowo, jeśli nie wprost. Fałsz jest bowiem dyskwalifikowany, odrzucany, jest czymś zdecydowanie negatywnym, wiązanym z tak czy inaczej rozumianym nieistnieniem. Funkcjonuje drugorzędnie, pochodnie w stosunku do prawdy. Jest jakby tylko po to, by dostarczyć jej opozycji, tła komparacyjnego. O prawdzie zaś powiada się, że jest preferowana, uznawana (stwierdzana), pozytywna, związana z istnieniem; pierwotna. To względem niej określa się fałsz, przy czym nie o „tło” tylko chodzi. Fałsz niejako jest czymś bytowo mniej niż akcydentalnym, ze względu na związanie z „nicością”, a nie tylko z empirycznym faktem błędu.

Gdy chodzi o formalne uhonorowanie statusu prawdy względem fałszu, wspomniane dopiero co postulaty semiotyczne pod adresem logiki są częściowo spełnione. Albowiem, po pierwsze, priorytet w wyliczaniu (symbolu) prawdy lub jej (jego) charakterystyki o tym już jakoś zaświadcza, jeśli dodatkowo kontekst to wzmacnia. Po drugie, określa się fałsz jako negację prawdy:

$0 \sim 1$ (IV,3), czemu odpowiada (w sensie, którego tu nie dyskutujemy); $fl(p) = \sim vr(p)$ (IV,4), gdzie fl , to falsum od p , vr — verum od p . Po trzecie, to co nazywa się tautologią jest wyrażeniem, które jest dla każdego wartościowania prawdziwym, sama etymologia nie wyróżnia tu prawdy, jest

tu więc jakaś preferencja prawdy. Po czwarte, przymatrycowy lub wewnątrzmatrycowy znak (meta)językowy (*) wskazuje zwykle formalnie na prawdę jako wartość wyróżnioną ze względu na matryce systemu. Wprawdzie bywają i macierze z wieloma wartościami wyróżnionymi, lecz brak dotąd wyraźnej ich interpretacji intuicyjnej²¹; gdyby zaś była, pozostałby problem wartości wyróżnionej z wyróżnionych.

Domykając już zbiór tych uwag, stanowiących pewną próbę ukazania podstawowego charakteru wartości logicznych prawdy i fałszu oraz zasadniczej ich bezkolizyjności wobec wielowartościowości, sformułujmy jeszcze pewne dodatkowe konkluzje a także refleksje nieco swobodniejszej natury.

Z dwu podstawowych wartości logicznych wyodrębnić należy wartość prawdy jako pierwotną (IV,5).

Fałsz, to wartość logiczna wtórna, uzyskana z pierwotnej przy pomocy pewnej operacji (IV,6). W rezultacie, zgodnie z tym co mówiono wyżej: Zamiast dwu wartości podstawowych traktowanych często jako pierwotne, istnieje jedna, nazwana odtąd pierwotną i jedna pierwotna operacja dotycząca prawdy, „fałszotwórcza” (IV,7). Odpowiednio do tego:

Symbole pewnych innych wartości niż prawda, przede wszystkim fałszu dadzą się konstruować w drodze analogicznego przekształcania przyjętego pierwotnie znaku prawdy (IV,8). Zakłada się tu, że:

Symbole wyrażeń są konwencjonalne, prawa logiki są względem ich kształtów inwariantne, stąd możliwość odpowiednich przemianowań (IV,9). Ale też dlatego:

można dobierać pożądane z racji pozakonwencjonalnych kształty wyrażeń lub ich układów (IV,10). W szczególności:

Dogodna jest pewna izomorfia między wyrażeniami (ich układami) a ich odniesieniem pozajęzykowym, tutaj — wartościami logicznymi (ich układami) (IV,11).

Przyjmuje się tu pewną pochodność (symbolu) fałszu względem (symbolu) prawdy:

Fałsz (jego znak) jest odwrotnością prawdy, (jej znaku) (IV,12).

Zakłada się przy tym asymetrię znaku prawdy, co gwarantuje „niejałowość” operacji odwracania (IV,13). Intuicja odwrotności, której nie sposób tu zgłębiać, nie wyklucza jakiegos innego trybu generowania (symbolu) fałszu z (symbolu) prawdy, np. przez zdwojenie znaku 1. Temu co powiedziano odpowiadają następujące równości:

²¹ Zob. np. B. Sobociński. *Aksjomatyzacja pewnych wielowartościowych systemów teorii dedukcji*. Warszawa 1936 (odb. z: „Roczniki Prac naukowych Zrzeszenia Asystentów Uniw. J. Piłsudskiego w Warszawie”) s. 2.

$0=R1$ (IV,14), gdzie R to symbol pewnej operacji, rotacji (w przyjętym kierunku), tutaj „negatywotwórczej” (może też być dająca zwierciadlane odbicie jeśli nie inne), ściślej — (pół)rotacji o 180° , czyli $\frac{\pi}{2}$ — rotacji. Z kolei wyeliminować można R , gdyż:

$$R1 = \mathfrak{I} \text{ (IV,15).}$$

Tym samym osiąga się tu sporą ekonomię: z jednego symbolu wartości pierwotnej i pierwotnej operacji R generuje się znaki pozostałych wartości zbioru, a przynajmniej fałszu. Dotyczy to tu wartości tzw. podstawowych.

To co zwie się logiką dwuwartościową (zdań) jest ze względu na R logiką swoiście jednowartościową, o jednej wartości pierwotnej, choć logiką dwu wartości podstawowych (IV,16). Idea jest prosta i chyba dlatego mało uwyraźniona. Sprawdzanie formuł metodą $1-\mathfrak{I}$ jest jeszcze bardziej trywialne niż jedynkowo-zerową (którą nie wiedzieć czemu nazywa się zero-w-jedynkową przy porządku $1-0$). Poza tym:

Parę $(1, \mathfrak{I})$ można wraz z R wykorzystać w konstrukcji prostych systemów wielowartościowych; np. trójwartościowego o układzie wartości $(1^x, \mathfrak{I}, \mathfrak{I})$, gdzie kreskę $\mathfrak{I}$ otrzymuje się $\frac{\pi}{4}$ -rotacją z 1 ; układ czterowartościowy uzyskać można transformując wartość wyjściową na trójwymiarową, tak by jej kolejne rotacje dawały rezultaty widoczne na płaszczyźnie i odpowiednio wzajemnie co do kształtu, to jest oddające odnośne interpozycje wartości (IV,17).

Inna idea do wykorzystania, to użycie znaków p lub p i q ewentualnie pochodnych jako odpowiedników wartości logicznych. Najpierw: Literę p potraktować można jako wartość zmienną (IV,18). Zakładamy też, że: Wartości dzielą się na: wartości stałe i zmienne (IV,19). I: Wartości zmienne to tyle, co zmienne (IV,20). Założenie to pozwala także eliminować wartości zmienne (może lepiej: quasi-wartości zmienne). Pomyśleć tu można prostą logikę trójwartościową o układzie $(1^*, p, \mathfrak{I})$, o wartości trzeciej, która przy sprawdzaniu formuł redukuje się natychmiast do $(1, \mathfrak{I})$, czyli $(1, 0)$ (IV,21).

Z drugiej strony, suponuje się równość:

$q=Rp$ (IV,22), gdzie R jest znakiem (pół)rotacji (180°), a q wolno dogodnie zinterpretować jako: zdanie-nie-takie-jak p (lecz odwrotne)²².

Można tu pomyśleć prosty system z układem $(1, p, q, \mathfrak{I})$ lub $(11, p, q, \mathfrak{I})$ (IV,23).

Daje się je sprowadzić do układu $(11 \mathfrak{I}, M, \mathfrak{I})$, analogicznego do

²² Odróżnia się tu zrotowane p od litery q ("ku"), co bywa niekiedy trudne do uchwycenia (zwłaszcza niewprawnemu) w druku, poza kursywą, zwłaszcza w krokach (czcionek) nader uproszczonych w stosunku do antykwy.

(11, 10, 01, 00) lub (1, 2, 3, 4), uzyskanego znaną metodą S. Jaśkowskiego (IV,24). Dopuszcza się tu wszędzie podstawienia jałowe: p/p .

Zamiast układu wartości (1, 1) przyjąć można układ (p, q) (IV,25). Przy tym (quasi)wartość p jest wyróżniona (p^*) (IV,25). W związku z tym: Sprawdzanie (w sensie pozytywnego rozstrzygania) formuły F polega na redukcyjnym uzyskaniu tautologizującego p po każdorazowym podstawieniu za zmienne odpowiednich (quasi)wartości p, q — na przykład w F (p,q): p/p , q/p ; p/p , q/q ; p/q , q/p ; p/q , q/q (IV,27).

Jest to dostosowane do kontroli wartości syntaktycznej systemu, ich składości (spójności).

Powiedzmy nawet wyraźniej:

Sprawdzaniu formuł nadaje się charakter syntaktyczny (IV,28). A więc inaczej niż zwykle, a na pewno prościej. Podobnie zresztą:

Nie semantycznie, lecz syntaktycznie rozumie się matryce logiczne (IV,29). Zawierają przecież, jak i sprawdzenia, quasi-wartości a zatem zmienne — por. (IV,18). Z drugiej zaś strony, proponowana tu metoda badania spójności jest inna niż Ajdukiewicza metoda indeksów i przypomina właśnie sprawdzanie:

Indeksowi „z” odpowiada tutaj zmienna zdaniowa p w roli — odpowiadająca — (quasi)wartości syntaktycznej zdania, bycia zdaniem; jedyna (co do kształtu) p podstawia się za zmienne formuły $F(p_1, \dots, p_n)$, dokonuje się następnie redukcji, jak przy sprawdzaniu i otrzymuje na końcu p, gdy wszystko jest w porządku (IV,30).

Idee te można próbować uogólnić na pewne sytuacje wielowartościowe. Tymczasem jednak odnotujmy na tle powyższego proste i urzekające sformułowanie (quasi)zasady dwuwartości:

Każde zdanie p albo ma (quasi)wartość p, albo q (IV,31). „Quasi”, bo: W logice z (p, q) brak w pewnym, standardowym sensie wartości logicznych (IV,32).

Poruszony, zwłaszcza pod koniec, pobieżnie zestaw tematyczny jest w niejednym dyskusyjny i daleki od właściwego ujęcia. W perspektywie pozostaje cały szereg trudnych problemów, zwłaszcza do całościowego przedstawienia, czy to będzie rotacja wyrażeń złożonych i ciągów wartości, czy symbolika funktorów izomorficzna względem przebiegów ich wartości semantycznych (w rodzaju pomysłu notacyjnego S. Leśniewskiego), czy też znane m.in. z prototypyki procedury otrzymania formuł od wielu zmiennych z formuł od jednej zmiennej.

Zresztą całość problematyki (meta)logicznej systemów wielowartościowych logiki zdań (powiedzielibyśmy raczej logiki wartości zdaniowych) — podkreślamy to raz jeszcze, wracając do uwag początkowych — nie

jest prosta i łatwa. Także odnośna opinia A. Mostowskiego (i analogiczne innych, wcześniej i później) z r. 1948²³, skądinąd wyważona, choć w pewnym sensie prodwuwartościowa, aktualizuje się niejako na coraz to nowym etapie badań metalogicznych, pomimo osiągniętych (ogromnych) postępów, a może właśnie dzięki nim.

Pozostawia się tu w tle, przynajmniej pewne, podstawowe problemy binarności zdania-sądu, wzięte w aspekcie różnych jego charakterystyk i odniesień. A więc — kwestie binarności myśli, działań, zdarzeń. Rzecz charakterystyczna, fundamentalne kategorie filozoficzne układały się zawsze w „dwuopozycje”. Warto zwrócić osobno uwagę na ten krąg problemów semiotycznie (i oczywiście filozoficznie) doniosłych, ważnych także dla logiki, ze względu na jej naturę, interpretację, zastosowania.

²³ Por. *Logika matematyczna*. Warszawa—Wrocław 1948 s. 42-43.